Centre of Geodetic Earth System Research

Gravitationsfeldbestimmung nach der Integralgleichungsmethode

Manfred Schneider

CGE Reports 7
2014

Imprint

Centre of Geodetic Earth System Research (CGE), a collaboration between

Institute of Astronomical and Physical Geodesy (IAPG)
Technische Universität München
Arcisstraße 21, D-80333 München

Research Facility Satellite Geodesy (FESG)
Technische Universität München
Arcisstraße 21, D-80333 München

Commission for Geodesy and Glaciology (KEG), Geodesy Section
Bavarian Academy of Sciences and Humanities
Alfons-Goppel-Str. 11, D-80539 München

German Geodetic Research Institute (DGFI)
Alfons-Goppel-Str. 11, D-80539 München

This work is published as Number 7 in the *CGE Reports* series. An electronic version is available from http://www.cge-munich.de.

Impressum

Centrum für Geodätische Erdsystemforschung (CGE), eine Kooperation zwischen

Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie
Technische Universität München
Arcisstraße 21, D-80333 München

Forschungseinrichtung Satellitengeodäsie
Technische Universität München
Arcisstraße 21, D-80333 München

Kommission für Erdmessung und Glaziologie (KEG), Abteilung Erdmessung
Bayerische Akademie der Wissenschaften
Alfons-Goppel-Str. 11, D-80539 München

Deutsches Geodätisches Forschungsinstitut (DGFI)
Alfons-Goppel-Str. 11, D-80539 München

Diese Arbeit wird als Nummer 7 der Schriftenreihe „CGE Reports“ veröffentlicht. Eine elektronische Version ist unter http://www.cge-munich.de erhältlich.

E-mail: info@cge-munich.de
Homepage: http://www.cge-munich.de
München, 2014

ISSN 2195-7126
ISBN 978-3-934205-38-3

Centre of Geodetic Earth System Research

Gravitationsfeldbestimmung nach der Integralgleichungsmethode

Manfred Schneider

CGE Report 7
2014

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Die vom Autor 1967 (S1) vorgeschlagene Integralgleichungsmethode wurde seither mehrfach erfolgreich angewendet (B2,R1,F1,M2), in den letzten Jahren vornehmlich zur Bestimmung des Gravitationsfeldes der Erde aus den Messungen der Satelliten CHAMP, GRACE und GOCE (M2,Y1,A1).

Dabei wurde ausschließlich auf die direkte Verwendung einer Fredholmschen Integralgleichung gesetzt (M2), die einer selbstadjungierten Randwertaufgabe mit Sturmschen Randbedingungen vom Typus einer Zielbewegung entspricht. Daneben gibt es die Möglichkeit, die Lösung der Randwertaufgabe wie auch den Integralgleichungskern nach dessen orthonormierten Eigenfunktionen zu entwickeln und damit ein unendliches System von Bedingungsgleichungen für die Entwicklungskoeffizienten der Lösung aufzustellen (S1, S3) dessen Auflösung die Bestimmung der Lösung der Integralgleichung ermöglicht. Da man diese Lösung aus den bei den Satellitenmissionen anfallenden Bahnverfolgungsdaten konstruieren kann, lassen sich die genannten Bedingungsgleichungen nutzen zur Bestimmung von Parametern, die bei der Formulierung des Bewegungsproblems verwendet werden, insbesondere solche des Gravitationsfeldes der Erde. Dieser Weg, der auf der auf Hammerstein (H1) zurückgehenden Methode der unendlich vielen Variablen beruht, wird in der vorliegenden Studie beschritten. Er könnte in künftigen Satellitenmissionen Vorteile gegenüber der direkten Verwendung der Integralgleichung bieten, versprechen diese doch deutlich gesteigerte Genauigkeiten und eine erhöhte räumliche und zeitliche Auflösung der lokalen Feldstrukturen, denen vermutlich das spektrale Bild besser angemessen ist als die Darstellung im Zeitbereich.

Regensburg, im Dezember 2014 Manfred Schneider

I. **Aufgabenstellung**

Die Bestimmung des Gravitationsfeldes basierte in den ersten Jahrzehnten nach dem Start des ersten künstlichen Erdsatelliten Sputnik 1 auf der Analyse der Umlaufbewegungen der Satelliten und konnte sich zunächst nur stützen auf Richtungsmessungen von Bodenstationen, die überdies die Umlaufbewegungen nur mit großen zeitlichen Lücken abdeckten. Nach und nach kamen Dopplermessungen und Laserentfernungsmessungen hinzu. Aber es gelang kaum die vollständige topozentrische Bewegung der Satelliten zu erfassen. Weiterhin ließen sich die Umlaufbewegungen nach wie vor nur sehr lückenhaft erfassen (B2, R1). Das änderte sich erst, als sich die Satelliten selbst in globale Navigationssysteme wie zum Beispiel das GPS einmessen konnten. Jetzt konnten die Lücken weitestgehend geschlossen werden. Auch die Ausstattung mit drag-free-Systemen und/oder Akzelerometern zur aktiven Kompensation bzw. Messung der nichtgravitativen Kraftkomponenten im Flugbereich der Satelliten erlaubte es, die für die Feldbestimmung benötigten Bahnen zu rekonstruieren. Die Methodik der Feldbestimmung konnte aber im wesentlichen beibehalten werden. Sie wurde erst geändert, als die Satelliten mit Meßsytemen für SST und SGG, also für die Messung von Auswirkungen der Inhomogenität des Gravitationsfeldes im Flugbereich ausgestattet wurden und von hoher Qualität waren. Die geplanten Nachfolgemissionen werden einerseits neuartige Observable erschließen und weitaus höhere Genauigkeiten bekannter Meßgrößen liefern. Das wird zwangsläufig zu einer Überarbeitung und auch Neugestaltung der Datennutzung führen (D1, G2). Die zu erwartenden Genauigkeiten werden auch einen Wechsel in den physikalischen Theorien erfordern. So wird die Gravitationsfeldbestimmung basieren müssen auf der Einsteinschen Gravitationstheorie, die zumindest in erster postnewtonscher Näherung herangezogen werden muß. In dieser tritt neben dem gravitoelektrischen Feldanteil ein Gravitomagnetfeld auf, das in der newtonschen Gravitationstheorie unbekannt ist (S3).

An diese Situation ist auch die Integralgleichungsmethode zur Gravitationsfeldbestimmung anzupassen (D1, G2). Das kann wie bisher im Zeitbereich geschehen, aber auch im Spektralbereich, der möglicherweise hinsichtlich der kleinräumigen Feldstrukturen besser geeignet ist.

II. Die Integralgleichungsmethode

Die Lösung der Newton-Eulerschen Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \mathbf{f}\left(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t\right) = \mathbf{0} \tag{II.1}$$

lässt sich in halbexpliziter Gestalt angeben (S3)

$$\mathbf{r}(t) = \tilde{\mathbf{r}}(t) + \int_{t_0}^{t} (t-\tau)\,\mathbf{f}\left(\mathbf{r}(\tau),\dot{\mathbf{r}}(\tau);\tau\right) d\tau \tag{II.2}$$

In dieser ***Volterraschen Integralgleichung*** bedeutet

$$\tilde{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{r}_0 + \dot{\mathbf{r}}_0\left(t-t_0\right) \tag{II.3}$$

eine gleichförmig-geradlinige Bewegung mit den Anfangswerten

$$\mathbf{r}_0 := \mathbf{r}\left(t_0\right) \text{ und } \dot{\mathbf{r}}_0 := \dot{\mathbf{r}}\left(t_0\right) \tag{II.4}$$

Fordert man von der Lösung (selbstadjungierte) Randbedingungen beispielsweise die einer Zielbewegung

$$t = t_A : \mathbf{r}_A := \mathbf{r}\left(t_A\right) \text{ und } t = t_B : \mathbf{r}_B := \mathbf{r}\left(t_B\right) \tag{II.5}$$

so erhält man die ***Fredholmsche Integralgleichung*** (S3)

$$\mathbf{r}\left(t_n\right) = \hat{\mathbf{r}}\left(t\ \right) + T^2 \int_0^1 K^I\left(t_n,\tau_n\right)\mathbf{f}\left(\mathbf{r}\left(\tau_n\right),\dot{\mathbf{r}}\left(\tau_n\right);\tau_n\right) d\tau_n \tag{II.6}$$

In dieser bedeuten

$\hat{\mathbf{r}}\left(t_n\right) := \mathbf{r}_A + \left(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A\right)t_n$
geradlinig-gleichförmige Bewegung zwischen den Randörtern in der Zeitspanne T
$T := t_B - t_A$
Zeitspanne zwischen den Randörtern der Bahnbewegung

(II.7)

und

$$t_n := \frac{t - t_A}{T} \text{ normierte Zeitzählung } \hat{=}\ t\ = 0 \hat{=}\ t = t_A \text{ und } t_n = 1 \hat{=}\ t = t_B \tag{II.8}$$

sowie

$$K^I\left(t_n,\tau_n\right) = \begin{cases} t_n\left(1-\tau_n\right) & \tau_n \le t_n \\ \tau_n\left(1-t_n\right) & t_n \le \tau_n \end{cases} \tag{II.9}$$

den Integralgleichungskern, der für die vorliegende Zielbewegung die Gestalt eines Dreieckskerns hat.

Die Inhomogenität **f** ist definiert durch die Bewegungsgleichung

$$\mathbf{f}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t) := -\frac{\mathbf{K}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t)}{m} \text{ mit } \quad m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{K}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t) \tag{II.10}$$

Angenommen sei im Folgenden eine Parametrisierung von **f** entsprechend

$$\mathbf{f}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t) = \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} g_i \mathbf{g}_i(\mathbf{r},t)}_{\text{Gravitation}} + \underbrace{\mathbf{h}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t)}_{\text{übrige Kraftkomponenten}} \tag{II.11}$$

Eingetragen in die Fredholmsche Integralgleichung erhält man für die Bestimmung der Parameter eine in den Parametern $\mathrm{g_i}$ lineare Gleichung.

II.1 Direkte Verwendung der Fredholmschen Integralgleichung

Den bisherigen Bestimmungen des Gravitationsfeldes der Erde nach der Integralgleichungsmethode liegt die lineare Gleichung

$$\begin{gathered} T^2 \sum_{i=0}^{\infty} g_i \int_0^1 K^I(t_n,\tau_n)\mathbf{g}_i(\mathbf{r}(\tau_n);\tau_n)\,d\tau_n = \mathbf{r}(t_n) - \hat{\mathbf{r}}(t_n) - T^2\mathbf{H}(t_n) \\ \text{mit} \quad \mathbf{H}(t_n) := \int_0^1 K^I(t_n,\tau_n)\mathbf{h}(\mathbf{r}(\tau_n),\dot{\mathbf{r}}(\tau_n);\tau_n)\,d\tau_n \end{gathered} \tag{II.12}$$

zugrunde, wobei Messdaten aus den Satellitenmissionen CHAMP, GRACE und GOCE verwendet worden sind, ergänzt durch die Bahnbestimmung aus der Einmessung dieser niedrig fliegenden Satelliten in das System der hochfliegenden GPS-Satelliten. Darüber hinaus wurden Modelle für die Berechnung des Beitrags der übrigen Kraftkomponenten $\mathbf{H}(t_n)$ zu den Meßzeitpunkten $t_A \triangleq 0 \le t_n \le 1 \triangleq t_B$ herangezogen (M2, Y1).

Bei dieser ***direkten Verwendung*** der Fredholmschen Integralgleichung werden die genutzten Bahnbögen meist in aneinander anschließende kurze Teilbögen zerlegt und die zu berechnenden bestimmten Integrale unter Verwendung von Quadraturformeln numerisch ausgewertet (I2, M2).

Als Ergebnis steht dann ein lineares Gleichungssystem zur Berech-nung der gesuchten Feldparameter mittels Verfahren der Ausgleichungsrechnung zur Verfügung (M2, Y1).

Das Gleichungssystem wird aufgestellt, indem man für jeden Messzeitpunkt $t_{n,z}^* \quad \left(z = 1(1)Z \;\; Z = \text{Anzahl der Meßzeitpunkte} \right)$ die Gleichung

$$T^2 \sum_{i=0}^{N} g_i \left\{ \int_0^1 K^I\left(t_{nz}^*, \tau\right) \mathbf{g}_i\left(\mathbf{r}\left(\tau_n\right); \tau_n\right) d\tau_n + \int_0^1 K^I\left(t_{nz}^*, \tau_n\right) \mathbf{h}\left(\mathbf{r}\left(\tau_n\right), \dot{\mathbf{r}}\left(\tau_n\right); \tau_n\right) d\tau_n \right\} \approx \mathbf{r}\left(t_{nz}^*\right) - \hat{\mathbf{r}}\left(t_{nz}^*\right)$$

(II.13)

für die Feldparameter g_i $\left(0 \le i \le N\right)$ aufschreibt. Folglich ist die Bedingung nur ungefähr erfüllt ($= \to \approx$).

Mit den Bezeichnungen

$$\mathbf{K}_{zi} := \int_0^1 K^I\left(t_n^*, \tau_n\right) \mathbf{g}_i\left(\mathbf{r}\left(\tau_n\right); \tau_n\right) d\tau_n \qquad i = 0(1)N \;\; N = \text{Entwicklungsgrad des Feldes}$$

$$\mathbf{H}_z := \int_0^1 K^I\left(t_n^*, \tau_n\right) \mathbf{h}\left(\mathbf{r}\left(\tau_n\right), \dot{\mathbf{r}}\left(\tau_n\right); \tau_n\right) d\tau_n \qquad z = 1(1)Z \;\; Z = \text{Zahl der Meßzeitpunkte}$$

(II.14a)

kann (II.13) als Matrixgleichung geschrieben werden

$$\underset{(N+1)\times Z}{\mathbf{K}_{zi}} \; \underset{(N+1)\times 1}{\mathbf{G}} + \underset{Z\times 1}{\mathbf{H}} \approx \frac{1}{T^2} \underset{Z\times 1}{\left(\mathbf{r}\left(t_{nz}^*\right) - \hat{\mathbf{r}}\left(t_{nz}^*\right)\right)} \qquad \text{(II.14b)}$$

Die Ergebnisse der Bahnbestimmung (I1)

$$\mathbf{r}(t) \text{ und } \hat{\mathbf{r}}(t) \text{ für jeden Bahnbogen}$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B \text{ und } \mathbf{r}\left(t_{n,z}^*\right) \text{ mit } t_{n,z}^* \in \left[t_{n,A}^*, t_{n,B}^*\right] \mathrel{\hat{=}} T = t_B - t_A \qquad \text{(II.15)}$$

werden zur Berechnung der Spaltenmatrizen (Z Komponenten)

$$\frac{\mathbf{r}\left(t_{nz}^*\right) - \hat{\mathbf{r}}\left(t_{nz}^*\right)}{T^2} \text{ und } \mathbf{H}\left(t_{nz}^*\right) = \int_0^1 \left(t_{nz}^* - \tau_n\right) \mathbf{h}\left(\mathbf{r}\left(\tau_n\right), \dot{\mathbf{r}}\left(\tau_n\right), \dot{\mathbf{r}}\left(\tau_n\right); \tau_n\right) d\tau_n \qquad \text{(II.16)}$$
$$mit \;\; 1 \le z \le Z$$

und auch neben den Hintergrundmodellen für die nichtgravitativen Kräfte (Strahlungsdruckkräfte, Stömungswiderstand der Hochatmosphäre sowie die sonstigen gravitativen Kräfte (z.B. Gezeitenkräfte) soweit nicht gemessen, benötigt. Im Falle der CHAMP-Mission waren die Örter $\mathbf{r}\left(t_{nz}^*\right)$ Teil der Meßgröße, d.h. einer der Endpunkte des hi-lo-SST mit GPS-Satelliten. Im Fall von GRACE, einer lolo-SST-Mission kamen Abstands- und Relativgeschwindigkeitsmessungen hinzu.

II.2 Anwendung der Methode der unendlich vielen Variablen

Die Integralgleichungsmethode läßt sich aber auch anwenden, indem man die auf Hammerstein (H1) zurückgehende Methode der unendlich vielen Variablen heranzieht.

Eine erfolgreiche Anwendung war die Analyse von Erdrotat-ionsdaten (F1). Dabei wurde die Methode auf gekoppelte Systeme erweitert, d.h anstelle der Greenschen Funktion (Integralgleichungskern) mußte ein Greenscher Tensor eingeführt werden (S3).

Leitgedanke des Verfahrens ist, die Bewegung in eine Reihe nach den Eigenfunktionen des Integralgleichungskerns zu entwickeln

$$\mathbf{r}(t_n) = \hat{\mathbf{r}}(t_n) + \sum_{\sigma=1}^{\infty} \mathbf{r}_\sigma \bar{\varphi}_\sigma^I(t_n)$$

mit den Eigenfunktionen (II.17)

$$\bar{\varphi}_\sigma^I(t_n) := \sqrt{2}\sin(\sigma\pi t_n) \text{ zu den Eigenwerten } \lambda_\sigma := (\sigma\pi)^2$$

Die Eigenfunktionen bilden auf dem Grundgebiet (S3)

$$0 \le t_n \le 1 \mathrel{\hat{=}} T = [t_A, t_B] \tag{II.18}$$

ein orthonormiertes Funktionensystem (ON-System)

$$\int_0^1 \bar{\varphi}_\mu^I(\tau_n)\bar{\varphi}_\nu^I(\tau_n)\,d\tau_n = \delta_{\mu\nu} \quad \mu,\nu = 1(1)\infty \tag{II.19}$$

Auch der Integralgleichungskern kann nach diesem ON-System in eine Reihe entwickelt werden. Die ***Bilineardarstellung*** des Kerns

$$K^I(t_n, \tau_n) = \sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{\bar{\varphi}_\sigma^I(t_n)\bar{\varphi}_\sigma^I(\tau_n)}{\lambda_\sigma} \tag{II.20}$$

ist nach einem ***Satz von Mercer*** im Grundgebiet gleichmäßig konvergent.

Trägt man die Entwicklung des Kerns sowie die Entwicklung der Lösung in die Fredholmsche Integralgleichung ein,

$$\hat{\mathbf{r}}(t_n) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathbf{r}_\nu \bar{\varphi}_\nu^I(t_n) = \hat{\mathbf{r}}(t_n) + T^2 \sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{\bar{\varphi}_\sigma^I(t_n)}{\lambda_\sigma} \int_0^1 \bar{\varphi}_\sigma^I(\tau_n)\mathbf{f}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; \tau_n)\,d\tau_n \tag{II.21}$$

multipliziert dann diese Gleichung mit der ν-ten Eigenfunktion und integriert über das Grundgebiet, und beachtet die Orthonormierung der Eigenfunktionen, so erhält man das i.allg. nichtlineare Gleichungssystem (S3)

$$\mathbf{r}_\nu = \frac{T^2}{\lambda_\nu} \int_0^1 \bar{\varphi}_\nu^I(\tau_n)\mathbf{f}(\mathbf{r}(\tau_n), \dot{\mathbf{r}}(\tau_n); \tau_n)\,d\tau_n \quad \nu = 1(1)\infty \tag{II.22}$$

zur Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten $\mathbf{r}_\nu$ der Lösung der Randwertaufgabe. Da diese aber aus der Bahnbestimmung bekannt ist, kann das Gleichungssystem als System von Bestimmungsgleichungen für in der Inhomogenität enthaltene Parameter genutzt werden (S3).

Geht man mit der Parametrisierung (II.11) in die Bestimmungsgleichungen (II.22) ein, so folgt

$$\mathbf{r}_\nu \approx \frac{T^2}{\lambda_\nu}\left\{\sum_{i=0}^{N} g_i \int_0^1 \bar{\varphi}_\nu^I(\tau_n)\mathbf{g}_i\left(\mathbf{r}(\tau_n),\tau_n\right)d\tau_n + \int_0^1 \bar{\varphi}_\nu^I(\tau_n)\mathbf{h}\left(\mathbf{r}(\tau_n),\dot{\mathbf{r}}(\tau_n);\tau_n\right)d\tau_n\right\} \quad \nu = 1(1)K \tag{II.23}$$

Mit den Bezeichnungen

$$\mathbf{J}_{\nu i} := \int_0^1 \bar{\varphi}_\nu^I(\tau_n)\mathbf{g}_i\left(\mathbf{r}(\tau_n),\tau_n\right)d\tau_n \quad \text{und} \quad \mathbf{Z}_\nu := \int_0^1 \bar{\varphi}_\nu^I(\tau_n)\mathbf{h}\left(\mathbf{r}(\tau_n),\dot{\mathbf{r}}(\tau_n);\tau_n\right)d\tau_n \tag{II.24}$$

lautet (II.23)

$$\mathbf{r}_\nu \approx \frac{T^2}{\lambda_\nu}\left\{\sum_{i=0}^{N} g_i \mathbf{J}_{\nu i} + \mathbf{Z}_\nu\right\} \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{\infty} g_i \mathbf{J}_{\nu i} + \mathbf{Z}_\nu = \frac{\lambda_\nu}{T^2}\mathbf{r}_\nu \tag{II.25}$$

oder als Matrixgleichung geschrieben (K Amplituden $\mathbf{r}_\nu$)

$$\underbrace{{}^t\begin{pmatrix} \mathbf{J}_{10} & \mathbf{J}_{11} & \dots & \mathbf{J}_{1N} \\ \mathbf{J}_{20} & \mathbf{J}_{21} & \dots & \mathbf{J}_{2N} \\ * & & & \\ * & & & \\ \mathbf{J}_{K0} & \mathbf{J}_{K2} & \dots & \mathbf{J}_{KN} \end{pmatrix}}_{\substack{\mathbf{J}\\ K\times(N+1)}} \underbrace{\begin{pmatrix} g_0 \\ * \\ * \\ * \\ g_N \end{pmatrix}}_{\substack{\mathbf{G}\\ (N+1)\times 1}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_1 \\ * \\ * \\ * \\ \mathbf{Z}_K \end{pmatrix}}_{\substack{\mathbf{Z}\\ K\times 1}} = \frac{1}{T^2}\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1\mathbf{r}_1 \\ * \\ * \\ * \\ \lambda_K\mathbf{r}_K \end{pmatrix}}_{\substack{\mathbf{D}\\ K\times 1}} \quad \text{mit} \quad i = 0(1)N \quad \text{und} \quad \nu = 1(1)K \tag{II.26}$$

Es korrespondiert dem Gleichungssystem aus der direkten Verwendung der Integralgleichung, also dem Zeitbereich

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{10} & \mathbf{K}_{11} & \dots & \mathbf{K}_{1N} \\ \mathbf{K}_{20} & \mathbf{K}_{21} & \dots & \mathbf{K}_{2N} \\ * & & & \\ * & & & \\ \mathbf{K}_{Z0} & \mathbf{K}_{Z2} & \dots & \mathbf{K}_{ZN} \end{pmatrix}}_{\substack{\mathbf{K}\\ Z\times(N+1)}} \underbrace{\begin{pmatrix} g_0 \\ * \\ * \\ * \\ g_N \end{pmatrix}}_{\substack{\mathbf{G}\\ (N+1)\times 1}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{H}_1 \\ * \\ * \\ * \\ \mathbf{H}_Z \end{pmatrix}}_{\substack{\mathbf{Z}\\ Z\times 1}} \approx \frac{1}{T^2}\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{r}(t_{n1}^*) - \hat{\mathbf{r}}(t_{n1}^*) \\ * \\ * \\ * \\ \mathbf{r}(t_{nZ}^*) - \hat{\mathbf{r}}(t_{nZ}^*) \end{pmatrix}}_{\substack{\mathbf{E}\\ Z\times 1}} \tag{II.27}$$

Löst man die beiden Gleichungssysteme nach der Spaltenmatrix **G** der Parameter auf, so bekommt man eine Beziehung zwischen den Koeffizientenmatrizen **K** und **J** aus der direkten Verwendung der Integralgleichung und aus dem spektralen Bild:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{K}\ \mathbf{G}+\mathbf{H}\approx\mathbf{E}\\
&\qquad\Rightarrow\qquad \mathbf{G}\approx\begin{cases}\mathbf{K}^{-1}\left(\mathbf{E}-\mathbf{H}\right)\\ \\ \mathbf{J}^{-1}\left(\mathbf{D}-\mathbf{Z}\right)\end{cases}\qquad\Rightarrow\mathbf{K}^{-1}\left(\mathbf{E}-\mathbf{H}\right)\approx\mathbf{J}^{-1}\left(\mathbf{D}-\mathbf{Z}\right)\\
&\mathbf{J}\ \mathbf{G}+\mathbf{Z}\approx\mathbf{D}
\end{aligned}
\tag{II.28}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow\mathbf{K}\mathbf{K}^{-1}\left(\mathbf{E}-\mathbf{H}\right)\approx\mathbf{K}\mathbf{J}^{-1}\left(\mathbf{D}-\mathbf{Z}\right)\to\left(\mathbf{E}-\mathbf{H}\right)\approx\mathbf{K}\mathbf{J}^{-1}\left(\mathbf{D}-\mathbf{Z}\right)\\
&\Rightarrow\qquad\qquad \mathbf{J}=f\left(\mathbf{K};\mathbf{E},\mathbf{H},\mathbf{D},\mathbf{Z}\right)
\end{aligned}
$$

Diese Beziehungen können insbesondere zur gegenseitigen Kontrolle der Vorgehensweisen herangezogen werden. Bei korrekter Durchführung sollte man weitgehend übereinstimmende Ergebnisse erhalten. Die im Zeitbereich auszuführenden Quadraturen sollten die Auswertung der bestimmten Integrale mit den i.allg. rasch oszillierenden Integranden der Bedingungsgleichungen der Methode der unendlich vielen Variablen bestätigen, also im Spektralbereich. Genauer zu untersuchen bleibt, bis zu welchem Entwicklungsgrad man die Reihen der Felddarstellung einerseits und der Entwicklung der Bahndarstellung andererseits treiben kann. Hier ist insbesondere von Bedeutung, bis zu welchem Entwicklungsgrad die fehlerbehafteten Meßdaten signifikante Amplituden $\mathbf{r}_v$ ergeben.

Anm.: Die Beziehung (II.28) setzt voraus, dass die Anzahlen K und Z *aufeinander abgestimmt und die Matrizen* $\mathbf{K}$ *und* $\mathbf{J}$ *invertierbar sind. Auch ist nicht berücksichtigt, dass die Parameterbestimmung mit Hilfe der Ausgleichungsrechnung erfolgen wird.*

III. Anwendung auf Variationsgleichungen

Die Integralgleichungsmethode ist auch anwendbar, wenn das Bewegungsproblem mittels Variationsgleichungen formuliert ist, also Differentialgleichungen 1.Ordnung vorliegen (S3)

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt}=\mathbf{g}\left(\mathbf{a},t\right)\quad \text{mit } \mathbf{a} \text{ bahnbeschreibende Variablen} \tag{III.1}$$

Differenziert man diese Gleichung nach der Zeit

$$\frac{d^2\mathbf{a}}{dt^2}=\frac{d}{dt}\mathbf{g}\left(\mathbf{a},t\right) \tag{III.2}$$

so sieht man, dass sich mit

$$\mathbf{f}\left(\mathbf{a},\dot{\mathbf{a}};t\right):=\frac{d}{dt}\mathbf{g}\left(\mathbf{a},t\right) \tag{III.3}$$

dieser Fall subsumieren lässt unter den oben behandelten Fall.

Trägt man die Darstellung der Inhomogenität **f** in die Fredholmsche Integralgleichung ein, so erhält man nach partieller Integration, beachtet man

$$\frac{d}{dt} = \frac{1}{T}\frac{d}{dt_n} \tag{III.4}$$

sowie

$$K^I \frac{d\mathbf{g}}{d\tau_n} = \frac{d}{d\tau_n}\left(K^I\mathbf{g}\right) - \frac{dK^I}{d\tau_n}\mathbf{g} \tag{III.5}$$

im Falle einer Randwertaufgabe die Fredholmsche Integralgleichung

$$\mathbf{a}(t_n) = \bar{\mathbf{a}}(t_n) + \int_0^1 K^I(t_n,\tau_n)\frac{d\mathbf{g}}{d\tau_n}\,d\tau_n \tag{III.6}$$

für die direkte Anwendung. Analog erhält man das unendliche System der Bedingungsgleichungen für die Entwicklungskoeffizienten

$$\mathbf{a}_\nu = \frac{T}{\lambda_\nu}\int_0^1 \frac{d\bar{\varphi}_\nu^I}{d\tau_n}\mathbf{g}(\mathbf{a},\tau_n)d\tau_n \tag{III.7}$$

III.1 Beispiel Kepler-Elemente

Für die Keplerschen Bahnelemente (B2, R1, S3)

$$\mathbf{a} := (i,\Omega,\omega,a,e,M)^t \quad {}^t \text{ bezeichnet Transposition} \tag{III.8}$$

bestehen die folgenden Variationsgleichungen, geht man mit der nach den Bahnelementen entwickelten Störungsfunktion (S3)

$$\begin{aligned}\tilde{R} &:= U_G(\mathbf{r},t) - U_{G,00}(\mathbf{r}) = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{l} U_{G,lm}(\mathbf{r},t) \\ &\text{mit } U_{G,lm} := GM_\oplus \frac{a_\oplus^l}{r^{l+1}}\left(C_{lm}C_{lm}(\vartheta,\lambda) + S_{lm}S_{lm}(\vartheta,\lambda)\right)\end{aligned} \tag{III.9}$$

d.h. mit

$$\begin{aligned}U_{G,lm} &= \frac{a_\oplus^l}{a^{l+1}}\sum_{p=0}^{l} F_{lmp}(i)\sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} G_{lpq}(e)\,S_{lmpq}(\omega,M,\Omega,\Theta) \\ &\text{mit } S_{lmpq}(\omega,M,\Omega,\Theta) = \begin{pmatrix} C_{lm} \\ -S_{lm}\end{pmatrix} C + \begin{pmatrix} S_{lm} \\ C_{lm}\end{pmatrix} S \\ &\text{und } \begin{pmatrix} S \\ C\end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \sin \\ \cos\end{pmatrix}\Big(\big(l-2p\big)\omega + \big((l-2p+q)M\big) + m(\Omega-\Theta)\Big) \\ &\text{sowie } \Theta = \dot{\Theta}(t-t_0) \text{ bei konstanter Erddrehung}\end{aligned} \tag{III.10}$$

ein,

$$\frac{di}{dt} = \sum_{lmpq} \mu a_\oplus^l \frac{F_{lmp} G_{lpq}}{\sqrt{\mu a\left(1-e^2\right)}\, a^{l+1} \sin i}\left(\left(l-2p\right)\cos i - m\right) S'_{lmpq}$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \sum_{lmpq} \mu a_\oplus^l \frac{\partial F_{lmp} / \partial i G_{lpq}}{\sqrt{\mu a\left(1-e^2\right)}\, a^{l+1} \sin i} S_{lmpq}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \sum_{lmpq} \mu a_\oplus^l \frac{1}{\sqrt{\mu a}\, a^{l+1}}\left(\frac{\sqrt{1-e^2}}{e} F_{lmp} \frac{\partial G_{lpq}}{\partial e} - \frac{\cot i}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial F_{lmp}}{\partial i} G_{lpq}\right) S_{lmpq}$$

$$\frac{da}{dt} = \sum_{lmpq} \mu a_\oplus^l F_{lmp} G_{lpq} \frac{l-2p+q}{a^{l+1}} S'_{lmpq}$$

$$\frac{de}{dt} = \sum_{lmpq} \mu a_\oplus^l \left(\frac{\sqrt{1-e^2}\left(l-2p+q\right)-\left(l-2p\right)\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{\mu a}\, a^{l+1} e}\right) S'_{lmpq}$$

$$\frac{dM}{dt} = n + \sum_{lmpq} \mu a_\oplus^l \frac{1}{\sqrt{\mu a}} \frac{F_{lmp}}{a^{l+1}}\left(2\left(l+1\right) G_{lpq} - \frac{1-e^2}{e}\right) S_{lmpq}$$

mit $\sum_{lmpq} := \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{l} \sum_{p=0}^{l} \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty}$

und $\mu := GM_\oplus$ Gravitionskonstante der Erde

$\mathrm{M}_\oplus, a_\oplus$ Masse bzw. Äquatorradius der Erde (III.11)

Am Beispiel der Gleichung für die große Halbachse *a* (S3)

$$\frac{da}{dt} = \sum_{lmpq} \mu a_\oplus^l F_{lmp} G_{lpq} S'_{lmpq} \frac{l-2p+q}{a^{l+1}} \tag{III.12}$$

sei die Anwendung des Verfahrens gezeigt:

Löst man diese Gleichung nach dem Poisson-Verfahren (S3), so lautet sie in erster Ordnung

$$\frac{da}{dt} = \sum_{lmpq} \mu a_\oplus^l \frac{l-2p+q}{a^{l+1}} F_{lmp} G_{lpq} S'_{lmpq} \tag{III.13}$$

mit i, Ω, ω, a, e konstant

worin nur der letzte Faktor S'_{lmpq} zeitabhängig ist. Definiert man

$$g^{(4)}\left(t\right) := \sum_{lmpq} \mu a_\oplus^l \frac{l-2p+q}{a^{l+1}} F_{lmp} G_{lpq} S'_{lmpq} \tag{III.14}$$

und trägt man das in die Bedingungsgleichung (III.7) ein, so bekommt man ($\bar{\Phi}_\nu^{II}\left(t_n\right) := \sqrt{2}\cos \nu\pi t_n$)

$$a_\nu^{(4)} = -\frac{T}{\sqrt{\lambda_\nu}} \int_0^1 \bar{\Phi}_\nu^{II}(\tau_n)\, g^{(4)}(\mathbf{a}_0, \tau_n)\, d\tau_n$$

$$= -\frac{T}{\sqrt{\lambda_\nu}} \sum_{lmpq} \mu a_\oplus^l \frac{l-2p+q}{a^{l+1}} F_{lmp} G_{lpq} \int_0^1 \bar{\Phi}_\nu^{II}(\tau_n)\, S'_{lmpq}(\mathbf{a}_0, \tau_n)\, d\tau_n \qquad \text{(III.15)}$$

Mit den geschlossen auswertbaren Integralen (Anhang A)

$$I_{lmpq,\nu}^{(4)} := \int_0^1 \bar{\Phi}_\nu^{II}(\tau_n)\, S'_{lmpq}(\tau_n)\, d\tau_n = \sqrt{2} \int_0^1 \cos(\nu\pi\tau_n)\, S'_{lmpq}(\tau_n)\, d\tau_n \qquad \text{(III.16)}$$

lauten die Bedingungsgleichungen

$$a_\nu^{(4)} = -\frac{T}{\sqrt{\lambda_\nu}} \sum_{lmpq} \mu a_\oplus^l \frac{l-2p+q}{a^{l+1}} F_{lmp} G_{lpq} I_{lmpq,\nu}^{(4)} \qquad \text{(III.17)}$$

Das ist ein unendliches lineares Gleichungssystem für die Feldparameter. Es ist eine lineare Beziehung zwischen den in den Integralen enthaltenen Feldparametern C_{lm}, S_{lm} und den Entwicklungskoeffizienten $a_\nu^{(4)}$ der Lösung der Variationsgleichung

$$\frac{da^{(4)}}{dt} = g^{(4)}(\mathbf{a}, t) \qquad \text{(III.18)}$$

für die große Halbachse. Mit den Integralen (Anhang A)

$$I_{lmpq,\nu}^{(4)} = I_{lmpq,\nu}^{(4),S} + I_{lmpq,\nu}^{(4),C} \qquad \text{(III.19)}$$

lauten die Bedingungsgleichungen

$$a_\nu^{(4)} = -\frac{T}{\sqrt{\lambda_\nu}} \sum_{lmpq} \mu a_\oplus^l \frac{l-2p+q}{a^{l+1}} F_{lmp} G_{lpq} \left(I_{lmpq,\nu}^{(4),S} + I_{lmpq,\nu}^{(4),C} \right) \qquad \text{(III.20)}$$

Analog ist für die übrigen 5 Variationsgleichungen zu verfahren.
Die entstehenden Systeme von Bedingungsgleichungen sind sämtlich Bestimmungsgleichungen für die Feldparameter C_{lm}, S_{lm} und können aus den Systemen von Entwicklungskoeffizienten

$$a_\sigma^{(i)} \text{ mit } i = 1(1)6 \text{ und } \sigma = 1(1)\infty \qquad \text{(III.21)}$$

durch Auflösung des Gesamtsystems der Bestimmungsgleichungen, die linear in den Parametern sind, ermittelt werden.

III.2 Beispiel Hill-Variablen

Für die Hillschen Variablen (hochgestellter Index t bedeutet Transposition der Matrix)

$$\mathbf{x} := \left(r, u, \Omega, \dot{r}, G, H\right)^t \tag{III.22}$$

bestehen die **Gaussschen Gleichungen** (S3)

$$\begin{aligned}
&\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{g}_0\left(r,G\right) + \mathbf{g}_1\left(r,G,H;r,u,\Omega;t\right) \\
&mit \quad \mathbf{g}_0\left(r,G\right) = \left(\frac{G^2}{r}, 0, 0, 0, \frac{G}{r^2}, 0\right)^t \\
&und \quad \mathbf{g}_1\left(r,G,H;r,u,\Omega;t\right) = \left(\frac{\partial U_G}{\partial r}, \frac{\partial U_G}{\partial u}, \frac{\partial U_G}{\partial \Omega}, 0, -\frac{\partial U_G}{\partial G}, -\frac{\partial U_G}{\partial H}\right)^t
\end{aligned} \tag{III.23}$$

IV. Satelliten-Gradiometrie

Die beiden Varianten einer Satellitengradiometrie SST und SGG haben das Ziel, raumzeitliche Änderungsraten der Gravitationsfeldstärke auszumessen und dadurch zu einer besseren raumzeitlichen Strukturauflösung des Feldes beizutragen.

Meßziel sind die höheren partiellen Ableitungen des Gravitationspotentials

$$\nabla_{\mathbf{r}}\nabla_{\mathbf{r}}U(\mathbf{r},t)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial x\partial x} & \frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 U}{\partial x\partial z} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 U}{\partial y\partial y} & \frac{\partial^2 U}{\partial y\partial z} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial z\partial x} & \frac{\partial^2 U}{\partial z\partial y} & \frac{\partial^2 U}{\partial z\partial z} \end{pmatrix} \tag{IV.1}$$

sowie

$$\nabla_{\mathbf{r}}\nabla_{\mathbf{r}}\nabla_{\mathbf{r}}U(\mathbf{r},t), \qquad \nabla_{\mathbf{r}}\nabla_{\mathbf{r}}\nabla_{\mathbf{r}}\nabla_{\mathbf{r}}U(\mathbf{r},t), \quad ... \tag{IV.2}$$

Sie legen im Sinne einer Taylor-Entwicklung die räumliche Struktur des Gravitationsfeldes um einen Aufpunkt (S4) fest, im Rahmen der ART die Komponenten des Riemannschen Krümmungstensors und dessen weitere raumzeitliche Ableitungen – zumindest in 1pN-Näherung (S3).

IV.1 SST

IV.1.1 SST nichtrelativistisch

Die Bewegungsgleichung eines Massenpunktes m in einem Galilei-System B lautet (S3)

$$m\frac{D^2\bar{\mathbf{x}}}{dt^2}=\bar{\mathbf{K}}\left(\bar{\mathbf{x}},\frac{D\bar{\mathbf{x}}}{Dt};t\right)+\bar{\mathbf{F}}+\bar{\mathbf{C}}$$

mit

$$\begin{aligned} &\bar{\mathbf{K}}\left(\bar{\mathbf{x}},\frac{D\bar{\mathbf{x}}}{Dt};t\right) && \text{eingeprägte Kraft} \\ &\mathbf{F}:=m\ddot{\mathbf{R}}+\bar{\mathbf{Z}}+\bar{\mathbf{T}} && \text{Führungskraft} \\ &\mathbf{Z}:=-m\;\bar{\mathbf{d}}\times\left(\bar{\mathbf{d}}\times\bar{\mathbf{x}}\right) && \text{Zentrifugalkraft} \\ &\bar{\mathbf{T}}:=-m\frac{D\bar{\mathbf{d}}}{Dt}\times\bar{\mathbf{x}} && \text{Eulersche Kreiselkraft} \\ &\bar{\mathbf{C}}:=-2m\bar{\mathbf{d}}\times\frac{D\bar{\mathbf{x}}}{Dt} && \text{Corioliskraft} \end{aligned} \tag{IV.3}$$

$\frac{D}{Dt}$ steht für die in B genommene Zeitableitung

Ist das Galilei-System rotationsfrei, d.h. ein Newton-System B_N , dann entfallen die Terme, in die die Winkelgeschwindigkeit eingeht. Die Bewegungsgleichung vereinfacht sich zu

$$
\begin{aligned}
& m\frac{D^2\bar{\mathbf{x}}}{dt^2} = \bar{\mathbf{K}}\left(\bar{\mathbf{x}}, \frac{D\bar{\mathbf{x}}}{Dt}; t\right) + \bar{\mathbf{F}} \\
& \text{mit} \\
& \qquad \bar{\mathbf{K}}\left(\bar{\mathbf{x}}, \frac{D\bar{\mathbf{x}}}{Dt}; t\right) \quad \text{eingeprägte Kraft} \\
& \qquad \mathbf{F} := m\ddot{\mathbf{R}} \qquad \text{Führungskraft}
\end{aligned}
\tag{IV.4}
$$

und wegen

$$
\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} = \frac{D}{Dt} + \bar{\mathbf{d}} \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} = \frac{D}{Dt} \\
& d/dt \quad \text{Zeitableitung in } K \\
& D/Dt \quad \text{Zeitableitung in } B_N
\end{aligned}
\tag{IV.5}
$$

folgt für die Bewegungsgleichung des Massenpunktes im translatorisch beschleunigten, nichtrotierenden Newton-System B_N

$$
m\frac{d^2\bar{\mathbf{x}}}{dt^2} = \bar{\mathbf{K}}\left(\bar{\mathbf{x}}, \frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt}; t\right) + \bar{\mathbf{F}}
\tag{IV.6}
$$

Die Querstriche über den Variablen bedeuten, dass die Vektoren sich auf eine Basis des Newton-Systems beziehen. Ist das Newton-System translatorisch unbeschleunigt, also ein Inertialsystem K, dann entfällt auch die Führungskraft, und man erhält

$$
\begin{aligned}
& m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{K}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \\
& \text{worin } \dot{\mathbf{r}} := \frac{d\mathbf{r}}{dt} \text{ } etc.
\end{aligned}
\tag{IV.7}
$$

Für die Nutzung von SST-Messungen sind die Bewegungsgleichungen zweier Satelliten heranzuziehen

$$
m_i\frac{D^2\bar{\mathbf{x}}_i}{dt^2} = \bar{\mathbf{K}}_i\left(\bar{\mathbf{x}}_i, \frac{D\bar{\mathbf{x}}_i}{Dt}; t\right) + \bar{\mathbf{F}}_i + \bar{\mathbf{C}}_i \quad i = 1, 2
\tag{IV.8}
$$

Für die Relativbewegung der Satelliten

$$
\Delta(t) := \mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_1(t)
\tag{IV.9}
$$

bekommt man mit

$$\frac{D^2\mathbf{x}_i}{dt^2} = \frac{1}{m_i}\left(\bar{\mathbf{K}}_i\left(\bar{\mathbf{x}}_i, \frac{D\bar{\mathbf{x}}_i}{Dt}; t\right) + \bar{\mathbf{F}}_i + \bar{\mathbf{C}}_i\right) =: \frac{1}{m_i}\mathbf{K}_i^{eff} =: \mathbf{f}_i \tag{IV.10}$$

$$\frac{D^2\Delta}{Dt^2} = \frac{\mathbf{K}_2^{eff}}{m_2} - \frac{\mathbf{K}_1^{eff}}{m_1} =: \delta\mathbf{f}^{eff} \tag{IV.11}$$

Mit einer Taylorentwicklung der Kräfte etwa um die Bahn des ersten Satelliten erhält man

$$\mathbf{f}_i\left(\mathbf{x}_1 + \Delta, \frac{D(\mathbf{x}_1 + \Delta)}{Dt}; t\right) \approx \mathbf{f}_i\left(\mathbf{x}_1, \frac{D\mathbf{x}_1}{Dt}; t\right) + \left(\frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{x}}\right)_{\mathbf{x}_1, D\mathbf{x}_1/Dt, t} \bullet \Delta + \left.\left(\frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial\left(\frac{D\mathbf{x}}{Dt}\right)}\right)\right|_{\mathbf{x}_1, \frac{D\mathbf{x}}{Dt}, t} \bullet \frac{D\Delta}{Dt} + \ldots \tag{IV.12}$$

Darin ist

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \frac{\partial \mathbf{g}_n}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \tag{IV.13}$$

falls sich **f** zusammensetzt gemäß

$$\mathbf{f} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} g_n \mathbf{g}_n(\mathbf{x}, t)}_{\text{Gravitation}} + \underbrace{\mathbf{h}\left(\mathbf{x}, \frac{D\mathbf{x}}{Dt}; t\right)}_{\text{übrige Kräfte}} \tag{IV.14}$$

Beachtet man noch

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\left(\frac{\partial U_G}{\partial \mathbf{x}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\left(\frac{\partial U_{G,n}}{\partial \mathbf{x}}\right) \tag{IV.15}$$

so erkennt man, dass die Relativbewegung wesentlich herrührt von der Inhomogenität des Gravitationsfeldes im Flugbereich der Satelliten

low-low-Konfiguration $\mathbf{x}_2 \approx \mathbf{x}_1 \Leftrightarrow |\Delta|\ klein$ (IV.16)

high-low-Konfiguration $(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)\ merklich \Leftrightarrow |\Delta|\ groß$ (IV.17)

Für die Relativbeschleunigung folgt

$$\delta \mathbf{f} = \mathbf{f}_2\left(\mathbf{x}_1+\Delta, \frac{D(\mathbf{x}_1+\Delta)}{Dt};t\right) - \mathbf{f}_1\left(\mathbf{x}_1, \frac{D\mathbf{x}_1}{Dt};t\right)$$
$$\approx \mathbf{f}_2\left(\mathbf{x}_1, \frac{D\mathbf{x}_1}{Dt};t\right) - \mathbf{f}_1\left(\mathbf{x}_1, \frac{D\mathbf{x}_1}{Dt};t\right)$$
$$+\left(\frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{x}}\right)_{\mathbf{x}_1, D\mathbf{x}_1/Dt, t} \bullet \Delta + \left(\frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial\left(\frac{D\mathbf{x}}{Dt}\right)}\right)\Bigg|_{\mathbf{x}_1, \frac{D\mathbf{x}}{Dt}, t} \bullet \frac{D\Delta}{Dt} + \ldots \tag{IV.18}$$

und damit als Bewegungsgleichung für die Relativbewegung der Satelliten

$$\frac{D^2\Delta}{Dt^2} = \frac{\mathbf{K}_2^{eff}}{m_2} - \frac{\mathbf{K}_1^{eff}}{m_1} =: \delta \mathbf{f}^{eff}$$
$$= +\left(\frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{x}}\right)_{\mathbf{x}_1, D\mathbf{x}_1/Dt, t} \bullet \Delta + \left(\frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial\left(\frac{D\mathbf{x}}{Dt}\right)}\right)\Bigg|_{\mathbf{x}_1, \frac{D\mathbf{x}}{Dt}, t} \bullet \frac{D\Delta}{Dt} + \ldots \tag{IV.19}$$

oder mit

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \frac{\partial \mathbf{g}_n}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \tag{IV.20}$$

$$\frac{D^2\Delta}{Dt^2} = +\left(\frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{x}}\right)_{(1)} \bullet \Delta + \left(\frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial\left(\frac{D\mathbf{x}}{Dt}\right)}\right)_{(1)} \bullet \frac{D\Delta}{Dt} + \ldots$$
$$= \left(\frac{\partial(\mathbf{g}+\mathbf{h})}{\partial \mathbf{x}}\right)_{(1)} \bullet \Delta + \left(\frac{\partial(\mathbf{h})}{\partial\left(\frac{D\mathbf{x}}{Dt}\right)} \bullet \frac{D\Delta}{Dt}\right)_{(1)} + \ldots \tag{IV.21}$$

Da **g** nicht von der Bahngeschwindigkeit des ersten Satelliten abhängt, folgt

$$\frac{D^2\Delta}{Dt^2} = \left(\frac{\partial(\mathbf{g}+\mathbf{h})}{\partial\mathbf{x}}\right)_{(1)} \bullet \Delta + \left(\frac{\partial(\mathbf{h})}{\partial\left(\frac{D\mathbf{x}}{Dt}\right)}\right)_{(1)} \bullet \frac{D\Delta}{Dt} + \ldots$$

$$\frac{D^2\Delta}{Dt^2} = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \left(\frac{\partial \mathbf{g}_n}{\partial\mathbf{x}}\right)_{(1)} \bullet \Delta + \left\{\frac{\partial\mathbf{h}}{\partial\mathbf{x}}\right\} \bullet \Delta + \left(\frac{\partial(\mathbf{h})}{\partial\left(\frac{D\mathbf{x}}{Dt}\right)} \bullet \frac{D\Delta}{Dt}\right)_{(1)} + \ldots \tag{IV.22}$$

bzw. wenn man das Gravitationspotential einführt

$$\frac{D^2\Delta}{Dt^2} = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}} \left(\frac{\partial U_{G,n}}{\partial\mathbf{x}}\right)_{(1)} \bullet \Delta + \left\{\frac{\partial\mathbf{h}}{\partial\mathbf{x}}\right\}_{(1)} \bullet \Delta + \left(\frac{\partial(\mathbf{h})}{\partial\left(\frac{D\mathbf{x}}{Dt}\right)} \bullet \frac{D\Delta}{Dt}\right)_{(1)} + \ldots \tag{IV.23}$$

IV.1.2 SST relativistisch

Die absehbare Steigerung der Messgenauigkeit bei den Abstandsmessungen in GRACE-follow-on – Missionen (G2) wird eine relativistische Behandlung der Messdaten erfordern. Dazu kann man die lineare Näherung der Einsteinschen Feld-/Bewegungsgleichungen heranziehen. Dabei erhält man als Gegenstück zum im vorigen Abschnitt verwendeten rotationsfreien Newton-System das Fermi-System, in dem die Bewegungsgleichung eines Satelliten wie folgt angegeben werden kann (S3):

IV.1.2.1 Lineare Näherung

Ein beliebig bewegter Beobachter verfolge die Freifallbewegung eines Polteilchens, die in seiner Nähe mit geringer Geschwindigkeit verläuft.

Die Freifallbewegung des Teilchens in dem vom Beobachter benutzten quasi-Galilei-System ist jedenfalls Lösung der Geodätengleichung

$$\frac{D^2x^\alpha}{D\lambda^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{Dx^\beta}{D\lambda} \frac{Dx^\gamma}{D\lambda} = 0 \tag{IV.24}$$

Darin bedeutet λ einen affinen Parameter längs der zeitartigen Geodäte des Teilchens x^α im quasi-Galilei-System.

Geht man in der Gleichung für die Koordinate $\alpha = 0 : x^0$ zur Eigenzeit

$$\tau = \frac{x^0}{c} \tag{IV.25}$$

des Beobachters über, so erhält man

$$\frac{D^2x^\alpha}{D\lambda^2} = -\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{Dx^\beta}{D\lambda}\frac{Dx^\gamma}{D\lambda} \tag{IV.26}$$

Damit kann in den Gleichungen für $\alpha = 1,2,3$ der affine Parameter λ durch die vom Beobachter auf seiner zeitartigen Weltlinie verwendete Eigenzeit τ ersetzt werden. Als Bewegungsgleichungen für die Bahn $x^i(\lambda)$ des Polteilchens bekommt man so (S3)

$$\frac{D^2x^i}{D\tau^2} = \left(-\Gamma^i{}_{\beta\gamma} + \frac{1}{c}\Gamma^0{}_{\beta\gamma}\frac{Dx^i}{D\tau}\right)\frac{Dx^\beta}{D\tau}\frac{Dx^\gamma}{D\tau} \tag{IV.27}$$

oder mit den Geschwindigkeiten bezüglich der Eigenzeit τ des Beobachters

$$\tilde{v}^i := \frac{Dx^i}{D\tau} \tag{IV.28}$$

$$\begin{aligned}\frac{D\tilde{v}^i}{D\tau} &= -c^2\Gamma^i{}_{00} + c\Gamma^0{}_{00}\tilde{v}^i - 2c\Gamma^i{}_{0j}\tilde{v}^j \\ &\quad +2\Gamma^0{}_{0j}\tilde{v}^i\tilde{v}^j - \Gamma^i{}_{jk}\tilde{v}^j\tilde{v}^k + \frac{1}{c}\Gamma^0{}_{jk}\tilde{v}^i\tilde{v}^j\tilde{v}^k\end{aligned} \tag{IV.29}$$

Darin dominieren für langsame Freifallbewegungen und geringe Gravitationsfeldstärken die ersten drei Terme auf der rechten Seite, so dass genähert folgt

$$\frac{D\tilde{v}^i}{D\tau} = -c^2\Gamma^i{}_{00} + c\Gamma^0{}_{00}\tilde{v}^i - 2\Gamma^i{}_{0j}\tilde{v}^J \tag{IV.30}$$

Entwickelt man um den Ursprung des quasi-Galilei-Systems, in dem sich der Beobachter findet, also

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\left(x^0, x^i\right) \approx \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\left(x^0, x^i = 0\right) + \left(\frac{\partial\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}}{\partial x^\kappa}\right)_{x^=, x^i = 0} x^i \tag{IV.31}$$

so gelangt man, wenn das quasi-Galilei-System längs der zeitartigen Geodäte des Beobachters Fermi-transportiert wird und damit für die Christoffel-Symbole gilt

$$\Gamma^i{}_{00} = \Gamma^0_{oi} \qquad \Gamma^0_{ij} = \Gamma^i{}_{jk} = \Gamma^0_{00} = 0 \tag{IV.32}$$

$$\frac{D^2x^i}{D\tau^2} \approx -\dot{u}^i - \Gamma^i{}_{00,j}x^j + 2\varepsilon^i{}_{jk}\tilde{v}^j\omega^k \tag{IV.33}$$

Drückt man darin noch das Christoffel-Symbol durch den Krümmungstensor aus, so gelangt man zu folgender Bewegungsgleichung eines frei fallenden Polteilchens im quasi-Galilei-System des Beobachters (S3)

$$
\begin{aligned}
\frac{D^2\mathbf{x}}{D\tau^2} = &-\left(1+\frac{\mathbf{a}\bullet\mathbf{x}}{c^2}\right)\mathbf{a} && \text{translatorische Führungsbeschleunigung} \\
&-2\mathbf{d}\times\dot{\mathbf{x}} && \text{Coriolis-Beschleunigung} \\
&+\mathbf{d}\times\left(\mathbf{d}\times\mathbf{x}\right) && \text{Zentrifugalbeschleunigung} \\
&-\dot{\mathbf{d}}\times\mathbf{x} && \text{Kreiselbeschleunigung} \\
&+\mathbf{f}_{Tid} && \text{Gezeitenbeschleunigung}
\end{aligned}
\qquad \text{(IV.34)}
$$

Darin bezeichnen

$\mathbf{f}_{Tid} := \left(R^{i}{}_{ojo}x^{j}\right)$ Gezeitenbeschleunigung infolge Inhomogenität des Gravitationsfeldes in der Umgebung des x^j des quasi-Galilei-Systems

und

$\mathbf{a} := \left(\frac{Du^i}{D\tau}\right) \equiv \left(\dot{u}^i\right)$ translatorische Führungsbeschleunigung des quasi-Galilei-Systems (IV.35)

Stellt man diese Bewegungsgleichung der nichtrelativistischen gegenüber, so ist neu der Term

$$
-\frac{\mathbf{a}\bullet\mathbf{x}}{c^2}\mathbf{a} \qquad \text{(IV.36)}
$$

IV.1.2.2 Nachnewtonsche Näherung

Anstelle der linearen Näherung wird man die Satellitenbewegung in einer nachnewtonschen Näherung der Einsteinschen Gravitationstheorie formulieren, weil sie weiterführend ist (S3).

Für ein Polteilchen erhält man in P (1)-Näherung bei Standard-post-Newton-Eichung die Bewegungsgleichung (S3)

$$
\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{v}}{dt} = &\nabla_{\mathbf{r}}\left(U_G - \frac{2U_G}{c^2} - c^2\Psi\right) \\
&-\frac{3\partial\mathbf{v}}{\partial t}\frac{\partial U_G}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}\nabla_{\mathbf{r}}U_G - \frac{4}{c^2}\mathbf{v}\bullet\left(\mathbf{v}\bullet\nabla_{\mathbf{r}}\right)U_G \\
&-c\frac{\partial\zeta}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla_{\mathbf{r}}\chi + c\mathbf{v}\times\left(\nabla_{\mathbf{r}}\times\zeta\right)
\end{aligned}
\qquad \text{(IV.37)}
$$

Darin bedeuten

$$
U_G\left(t,\mathbf{r}\right), \chi\left(t,\mathbf{r}\right), \zeta\left(t,\mathbf{r}\right) \; und \; \Psi\left(t,\mathbf{r}\right) \qquad \text{(IV.38)}
$$

Potentialfunktionen, die zu den Feldern führen

$$\mathbf{E}^G(t,\mathbf{r}) := -\nabla_{\mathbf{r}}\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \qquad \text{gravitoelektrisches Feld}$$

$$\text{mit dem Superpotential} \quad \Phi := U_G + \Psi \tag{IV.39}$$

$$\mathbf{B}^G(t,\mathbf{r}) := \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{A} \qquad \text{gravitomagnetisches Feld}$$

Sie bedingen zusammen eine zur Lorentzkraft der Elektrodynamik analoge Kraft.

Anm.: Die drei letzten Terme in der Bewegungsgleichung treten zufolge des Vektorpotentials $\mathbf{A}(t,\mathbf{r})$ *auf, d.h. sie entfallen, wenn der felderzeugende Zentralkörper sich nicht bewegt, beispielsweise nicht rotiert.*

IV.2 SGG

IV.2.1 SGG nichtrelativistisch

Die Nutzung der Satellitengradiometrie Messungen kann sich stützen auf die Darstellung der Feldstruktur durch eine Taylorentwicklung um einen Aufpunkt. Eine solche ist in (S4) angegeben. Die Berechnung der Taylorkoeffizienten kann nach Cunningham bzw. Drozyner (S3) rekursiv erfolgen. Die Messungen liefern derzeit die Komponenten des Gravitationstensors; also die zweiten partiellen Ableitungen des Gravitationspotentials. In der Entwicklung befindliche, auf Atominterferometrie beruhende Messsysteme könnten höhere partielle Ableitungen liefern. Dann muss die Taylorentwicklung über den Entwicklungsgrad 2 hinaus verwendet werden. Und es wird zwangsläufig die Verarbeitung im Rahmen der Einsteinschen Gravitationstheorie erfolgen müssen.

IV.2.2 SGG relativistisch

Für die Nutzung der Messungen kann als Ausgangsgleichung die Differentialgleichung der geodätischen Abweichung dienen:

Sie beschreibt die Relativbeschleunigung zwischen zwei Polteilchen, die zwei verschiedenen infinitesimal benachbarten (zeitartigen) Geodäten folgen (S3)

$$\frac{D^2 x^\alpha(\tau)}{d\tau^2} = 0 \qquad \frac{D^2 y^\alpha(\eta)}{d\eta^2} = 0$$

$$\text{Teilchen 1} \qquad\qquad \text{Teilchen 2} \tag{IV.40}$$

Es bedeuten

$$\left.\begin{matrix}\tau\\ \eta\end{matrix}\right\} \quad \text{Eigenzeit der vom Teilchen} \left\{\begin{matrix}1\\ 2\end{matrix}\right\} \text{mitgeführten Uhr} \tag{IV.41}$$

$$x^\alpha(\tau) \text{ bzw. } y^\alpha(\eta) \text{ Bahnen der Teilchen 1 bzw. 2}$$

Nach Taylorentwicklungen erhält man einen Zusammenhang der Eigenzeiten, womit in der Bewegungsgleichung für das zweite Teilchen die Eigenzeit η durch diejenige des ersten Teilchens τ ersetzt werden kann. Subtrahiert man von der so umgeformten Geodätengleichung des zweiten Teilchens diejenige des ersten Teilchens, so resultiert eine Differentialgleichung für den Koordinatenunterschied

$$\delta\Delta^{\alpha} := y^{\alpha} - x^{\alpha} \tag{IV.42}$$

Drückt man dessen zweite Ableitung durch die zweite kovariante Ableitung $D^2\left(\delta\Delta^{\alpha}\right)/d\tau^2$ vermittels

$$Da^{\alpha} = da^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} a^{\beta} a^{\gamma} \tag{IV.43}$$

aus, so gelangt man zur ***Differentialgleichung der geodätischen Abweichung*** (Deviation) (S3)

$$\frac{D^2\left(\delta\Delta^{\alpha}\right)}{d\tau^2} + R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} \frac{dx^{\beta}}{d\tau} \delta\Delta^{\mu} = 0 \tag{IV.44}$$

Der Riemannsche Krümmungstensor ist darstellbar durch die Christoffel-Symbole

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = \frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\beta\delta}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}}{\partial x^{\delta}} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma}\Gamma^{\mu}_{\beta\delta} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\delta}\Gamma^{\mu}_{\beta\gamma} \tag{IV.45}$$

und diese sind durch das metrische Feld $g_{\mu\nu}\left(x^{\kappa}\right)$ darstellbar

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\sigma} \left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} \right) \tag{IV.46}$$

Das metrische Feld seinerseits ist in postnewtonscher Näherung durch das newtonsche Potential darstellbar, das etwa im Sinne einer Kugelflächenfunktionsentwicklung parametrisiert wird oder durch eine Multipolentwicklung der Potentialfunktion (S3).

Die Darstellung des metrischen Feldes wird mit der zu erwartenden höheren Messgenauigkeit und raumzeitlichen Feldstrukturauflösung eine neue Herausforderung werden. Dabei dürfte sich die Wahl zwischen sog. Gebiets- und Punktparameter-darstellungen erneut stellen, jetzt aber im Kontext der Einsteinschen Gravitationstheorie (S3). Hinzu kommt das Auftreten des gravitomagnetischen Feldanteils.

V. Zusammenfassung und Ausblick

Die Integralgleichungsmethode zur Bearbeitung des allgemeinen Bahnbestimmungsproblems, insbesondere der Gravitationsfeldbestimmung kann in zweierlei Weise eingesetzt werden

- mit der direkten Verwendung der Integralgleichung, einer Fredholmschen Integralgleichung bei Randwertdeterminierung bzw. einer Volterraschen Integralgleichung bei Anfangswertdeterminierung (S3)
- durch Anwendung der Methode der unendlich vielen Variablen (H1) zur Lösung der Integralgleichung.

Im ersten Fall wird das gestellte Bahnbestimmungsproblem im Zeitbereich gelöst, im zweiten Fall im Spektralbereich.

Der Integralgleichungskern der Fredholmschen Integralgleichung ist im Zeitbereich ein Dreieckskerns von der Gestalt (S3)

$$K^I(t_n,\tau_n)=\begin{cases} t_n(1-\tau_n) & \tau_n \le t_n \\ \tau_n(1-t_n) & t_n \le \tau_n \end{cases} \tag{V.1}$$

Im spektralen Bild ist dieser Kern entwickelt nach dem orthonormierten System seiner Eigenfunktionen, beispielsweise bei Sturmschen Randbedingungen vom Typus einer Zielbewegung durch die im Grundgebiet gleichmäßig konvergente Bilineardarstellung

$$K^I(t_n,\tau_n)=\sum_{\sigma=1}^{\infty}\frac{\bar{\varphi}_\sigma^I(t_n)\bar{\varphi}_\sigma^I(\tau_n)}{\lambda_\sigma} \quad mit \quad \lambda_\sigma=(\sigma\pi)^2 \quad \sigma=1(1)\infty \tag{V.2}$$

Im Zeitbereich ist kein Lösungsansatz verfügbar, im Spektralbereich wird die Lösung der Integralgleichung durch die Reihe nach den Eigenfunktionen (I3, S3)

$$\mathbf{r}(t_n)=\hat{\mathbf{r}}(t_n)+\sum_{\sigma=1}^{\infty}\mathbf{r}_\sigma\bar{\varphi}_\sigma^I(t_n) \tag{V.3}$$

dargestellt, wobei die Entwicklungskoeffizienten aus dem System von Bedingungsgleichungen

$$\mathbf{r}_\sigma=\frac{T^2}{\lambda_\sigma}\int_0^1\bar{\varphi}_\sigma^I(\tau_n)\mathbf{f}\left(\mathbf{r}(\tau_n),\dot{\mathbf{r}}(\tau_n);\tau_n\right)d\tau_n \quad \sigma=1(1)\infty \tag{V.4}$$

zu bestimmen sind, in denen die Inhomogenität $\mathbf{f}\left(\mathbf{r}(t_n),\dot{\mathbf{r}}(t_n);t_n\right)$
die interessierenden Parameter P_i , z.B. die des Gravitationsfeldes g_i enthält in der Gestalt

$$\mathbf{f}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t)=\sum_{i=0}^{\infty}g_i\mathbf{g}_i(\mathbf{r},t)+\mathbf{h}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t) \tag{V.6}$$

Darin steht $\mathbf{h}\left(\mathbf{r}(t_n),\dot{\mathbf{r}}(t_n);t_n\right)$ für die im Hinblick auf die Parameterbestimmung nicht interessierenden Komponenten, die entweder durch Messung bekannt sind oder über sog. Hintergrundmodelle bereitgestellt werden können.

Über Ortungs- und Bahnverfolgungsverfahren kann die Bewegung $\mathbf{r}(t)$ als kinematische Größe bereitgestellt werden. Damit ist in beiden Varianten der Parameterbestimmung die erforderliche Lösung der Integralgleichung bereits geleistet. Die Integralgleichung bzw. das System der Bedingungsgleichungen werden damit zu Bestimmungsgleichungen für die Parameter.

Die Integralgleichungsmethode ist über die Gravitationsfeldbestimmung hinaus auf die Bestimmung anderer Parameter wie etwa aus der Modellierung der Erdrotation anwendbar (F1), aber auch auf die Lösungsbestimmung (I1, I3, S2) von Bewegungsproblemen und der Ephemeridenrechnung. In einigen Fällen kann es vorteilhaft sein, die durch den Term

$$\bar{\mathbf{r}}(t_n) = \mathbf{r}_A + (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A)\,t_n \tag{V.7}$$

beschriebene gleichmäßig-geradlinige Bewegung zwischen den Randörtern in der Zeitspanne $T := t_b - t_A$ zu ersetzen durch eine bessere Anpassung an den aktuellen Bahnverlauf (S3)

$$\mathbf{r}(t_n) = \bar{\mathbf{r}}(t_n) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathbf{r}_\nu \bar{\varphi}_\nu^I(t_n)\,. \tag{V.8}$$

So ist im Falle einer Satellitenbewegung die Annäherung des Bahnverlaufs durch eine Keplersche Kreisbahn oder elliptische Keplerbahn besser als eine die Randörter verbindende Trägheitsbahn. Eine Modifikation der von Bucerius bei der Gaussschen Bahnbestimmung verwendeten Integralgleichung mit einer Trägheitsbewegung im Zeitraum T hat Brumberg 1962 angegeben. Sie verwendet eine elliptische Keplerbewegung zwischen den Randörtern. Die Methode der unendlich vielen Variablen stellt eine Verbindung her zwischen den Amplituden der Entwicklung der Lösung der Randwertaufgabe nach den ortho-normierten Eigenfunktionen der Integralgleichung und den Parametern der Inhomogenität der Bewegungsgleichung. Wenn wie im Falle des Gravitationsfeldes dieses nach Kugelflächenfunktionen entwickelt wird, so liegt eine lineare Beziehung zu den Potentialkoeffizienten dieser Entwicklung vor.
Die Integralgleichungsmethode wurde von Bucerius insbesondere auf die Lösung der vorläufigen Bahnbestimmung angewendet. Er konnte so die Konvergenzfrage (B4, S3) der Gaussschen Bahnbestimmung klären, speziell die des Gaussschen Sektor-zu-Dreieck-Verfahrens. Darüber hinaus hat er eine Integralgleichungstheorie (B5) auf Fragen des Sternaufbaus angewendet. Weitere Anwendungen sind im Anhang E skizziert. Diese könnten erweitert werden auf die Bestimmung periodischer Lösungen der Lorenzgleichungen (Anhang F) aus der Atmosphärenphysik (P1).

Da beispielsweise das Hamilton-Prinzip auf Randwertaufgaben führt (B3, S3) und nicht auf Anfangswertaufgaben, ist in Anbetracht der Heisenbergschen Unbestimmtheitsrelation, also der prinzipiellen Unmöglichkeit der gleichzeitigen beliebig genauen Bestimmung von Ort und Geschwindigkeit einer Integralgleichungsmechanik der Vorzug vor einer Differentialgleichungsmechanik zu geben. Weitere Gründe hierfür führt Bucerius an (B3).

Schließlich sei noch die Frage angeschnitten, wie man nicht modellierte/-bare Kraftkomponenten bei der Parameterbestimmung nach der Integralgleichungsmethode berücksichtigen kann. Dazu sei auf (F1) verwiesen. Dort wird auch gezeigt, wie man zu verfahren hat, wenn ein Greenscher Tensor (S3) eingeführt werden muss.

Nicht angesprochen wurde die Verbindung der Messdaten zu den Bahndaten. Das kann den der Anwendung gewidmeten Arbeiten (M2, F1, G2, R1, Y1) im Einzelnen entnommen werden.

Literaturhinweise

(A1) ***Albertella, A., Rummel, R. (2014): GOCE geoid, mean dynamic ocean topography and geostrophic velocities,*** CGE-Report No.6 ISBN 978-3-934205-37-6

(B1) ***Bartsch, H.-J. (2004):Taschenbuch Mathematischer Formeln.*** **Fachbuchverlag Leipzig (20.Auflage)**

(B2) ***Berger, X. (1971):Application de la Theorie de Schneider a l`Etude des coefficients d`Ordre 13 du potentiel terrestre*** These, Paris.

(B3) ***Bucerius, H. (1952): Determinierung der klassischen Mechanik durch zeitliche Randwerte.*** Astron.Nachrichten, Bd. 280, Berlin

(B4) ***Bucerius, H. (1950-1955): Bahnbestimmung als Randwertproblem I-V.*** Astron. Nachrichten Bde. 278,280-282, Berlin

(B5) ***Bucerius, H, (1938,1947): Integralgleichungstheorie des Sternaufbaus.*** Astronomische Nachrichten, Bde. 265-267 (1938),275 (1947).

(D1) ***Daras I., Pail R., Murböck M., Yi W. (2014): Gravity field processing with enhanced numerical precision for LL-SST missions.*** J. Geod.

(F1) ***Fröhlich, H. (1994): Bestimmung von Modellparametern der Erde durch Analyse ihrer Drehbewegung.*** Veröff. d.Dt.Geod.Komm. Reihe C, Heft 420

(G1) ***Greiner W., Reinhardt J. (1993): Theoretische Physik Bd. 7a Feldquantisierung.*** Verlag Harri Deutsch

(G2) ***Gruber Th., Murböck M., NGGM-D, Team (2014): e2.motion - Earth System Mass Transport Mission (Square) - Concept for a Next Generation Gravity Field Mission,*** Final Report of Project "Satellite Gravimetry of the Next Generation (NGGM-D)"; Deutsche Geodätische Kommission der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Reihe B, Angewandte Geodäsie, Vol. 2014, Heft 318, München

(H1) ***Hammerstein, A. (1930): Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen.*** Acta mathematica 54

(I1) ***Ilk, K.H. (1977): Berechnung von Referenzbahnen durch Lösung selbstadjungierter Randwertaufgaben,*** Veröff.d. Dt.Geod.Komm., Reihe C, Heft 228, München.

(I2) ***Ilk, K.H., Klose, U.(1984): Zur numerischen Quadratur von Integralen im Rahmen der Bestimmung des hochfrequenten Anteils des Gravitationsfeldes,*** Veröff. d. Komm. f. d. Intern. Erdm.,Astron. Geod. Arb., Heft Nr. 45 München.

(I3) ***Ilk, K.H., Klose, U.(1986): Zur Konstruktion von Restgliedfunktionen bei der Lösung von Randwertproblemen zur NEWTON – EULERschen Bewegungsgleichung*** Veröff. d. Komm. f. d. Intern. Erdm.,Astron. Geod. Arb., Heft Nr. 48 München.

(M1) *Macke W. (1962): Lehrbuch der Theoretischen Physik, Band II Wellen.* Akademische Verlagsgesellschaft Geest&Portig K.-G. Leipzig

(M2) *Mayer-Gürr, T. (2006): Gravitationsfeldbestimmung aus der Analyse kurzer Bahnbögen am Beispiel der Satellitenmissionen CHAMP und GRACE.* Institut für Theoretische Geodäsie der Universtität Bonn, Dissertation.

(M3) *Mai, E., Schneider, M. &Cui, Ch. (2008): Zur Entwicklung von Bahntheorien – Methodik und Anwendung.* Veröff. d. Dt. Geod.Komm. Reihe A, Heft Nr. 122 München

(P1) *Pichler, H. (1997): Dynamic der Atmosphäre.* Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg (3.Auflage)

(R1) *Reigber, Ch. (1974): Bestimmungsgleichungen für die Resonanzparameter der Ordnung 13 aus der Analyse von Bahnen der Satelliten GEOS C, BEC und D1D*, Veröff. d. Dt. Geod. Komm., Reihe C, Nr. 198 , München.

(S1) *Schneider, M. (1967): Lösungsvorschlag zum Bahnbestimmungsproblem*. BMwF-FB W 67-35. München ***Übersetzung: A General Method of Orbit Determination*** Library Translation No.1279 (Royal Aircraft Establishment, Farnborough Hants U.D.C.)

(S2) *Schneider M. (2010): Entwurf einer Resonanztheorie basierend auf Integral-gleichungen.* Schriftenreihe IAPG und FESG, TU München Heft Nr. 33

(S3) *Schneider, M. (1992-1999): Himmelsmechanik I-IV.* Bibliographisches Institut Mannheim und Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg

(S4) *Schneider. M. (2014): Zur Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen.* CGE-Report No 5. ISBN 978-3-934205-36-9

(S5) *Schneider, M. &Cui, Ch. (2005): Theoreme über Bewegungsintegrale und ihre Anwendung in Bahntheorien*. Veröff. d. Dt.Geod.Komm. Reihe A, Heft Nr. 121 München

(Y1) *Yi, W.(2012): The Earth's gravity field from GOCE.* CGE-Report No.2, ISBN 978-3-934205-34-5

Danksagung

Für die Aufnahme der vorliegenden Studie in die Reihe der CGE-Reports des Centre of Geodetic Earth System Research bedanke ich mich bei dessen Sprccher, Herrn Univ.-Prof. Dr. Roland Pail. Weiter danke ich Herrn Dr.-Ing. Martin Horwath für seine Verbesserungsvorschläge und Herrn Dr.-Ing. Thomas Gruber.

Anhang A

Integrale

Die in III.1 definierten Integrale

$$I^{(4)}_{lmpq,\nu} = \int_0^1 \bar{\Phi}^{II}_{\nu}\left(\tau_n^{'}\right) S^{'}_{lmpq}\left(\mathbf{a}_0, \tau_n^{'}\right) d\tau_n^{'} \tag{A.1}$$

lassen sich geschlossen berechnen, beachtet man

$$\begin{aligned}
S^{'}_{lmpq} &= \begin{pmatrix} -C_{lm} \\ S_{lm} \end{pmatrix} S(t) + \begin{pmatrix} S_{lm} \\ C_{lm} \end{pmatrix} S(t) \\
\text{mit } &\left.\begin{matrix} S(t) \\ C(t) \end{matrix}\right\} = \begin{cases} \sin\Psi \\ \cos\Psi \end{cases} \\
&\Psi(t) := \left(\left(l-2p\right)\omega + \left(l-2p+q\right)M(t) + m\left(\Omega - \Theta(t)\right)\right) \\
&\qquad = \left(\left(l-2p\right)\omega + \left(l-2p+q\right)\left(M_0 + nt\right) + m\left(\Omega - \left(\Theta_0 + \dot{\Theta}t\right)\right)\right)
\end{aligned} \tag{A.2}$$

$$\begin{aligned}
I^{(4)}_{lmpq,\nu} &:= \int_0^1 \bar{\Phi}^{II}_{\nu}\left(\tau_N\right) S\left(\tau_n\right)\Big|_{\alpha_0} d\tau_n + \int_0^1 \bar{\Phi}^{II}_{\nu}\left(\tau_N\right) C\left(\tau_n\right)\Big|_{\alpha_0} d\tau_n \\
&=: \qquad I^{(4)S}_{lmpq,\nu} \qquad + \qquad I^{(4)Cc}_{lmpq,\nu}
\end{aligned} \tag{A.3}$$

Die Teilintegrale können geschlossen berechnet werden mit Hilfe der Formeln (B1)

$$\begin{aligned}
&\left.\begin{matrix} \int \sin ax \sin bx dx \\ \int \cos ax \cos bx dx \end{matrix}\right\} = -\frac{(a+b)\sin(a-b) + (a-b)\sin(a+b)}{2\left(a^2 - b^2\right)} \\
&\int \sin ax \cos bx dx = -\frac{\cos(a+b)}{2(a+b)} - \frac{\cos(a-b)}{2(a-b)} + \frac{2a}{\left(a^2 - b^2\right)}
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Anhang B

Poisson-Verfahren

Die gesuchte Lösung der Variationsgleichungen

$$\frac{d\alpha}{dx} = \varepsilon \hat{\mathbf{f}}\left(\alpha, x\right) \quad \varepsilon \ll 1 \text{ Kleinheitsparameter} \tag{B.1}$$

werde als Potenzreihe nach dem Kleinheitsparameter ε mit noch zu bestimmenden Koeffizientenfunktionen $a^{(\nu)}\left(x\right)$ angesetzt

$$\alpha\left(x\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \alpha^{(\nu)}\left(x\right) \tag{B.2}$$

Eingetragen in die Variationsgleichungen erhält man nach Taylor-entwicklung der rechten Seite und anschließendem Vergleich von Termen gleicher Potenzen von ε ein System von Bestimmungsgleichungen für die Koeffizientenfunktionen $\alpha^{(\nu)}\left(x\right)$.
Deren Lösung liefert in schrittweiser Annäherung (sukzessive Approximation) die gesuchte Lösung der Variationsgleichungen (S3).

$$\begin{aligned}
&\frac{d\alpha^{(0)}}{dx} = \mathbf{0} && \alpha^{(o)}\left(x\right) = \text{const} = \alpha_0 \\
&\frac{d\alpha^{(1)}}{dx} = \hat{\mathbf{f}}\left(\alpha^{(0)}, x\right) && \alpha^{(1)}\left(x\right) \\
&\frac{d\alpha^{(2)}}{dx} = \bar{\alpha}^{(1)}\left(x\right) \nabla_{\alpha} \hat{\mathbf{f}}\left(\alpha\left(x\right), x\right)\Big|_{\alpha\left(x\right) = \alpha_0\left(x\right)} && \alpha^{(2)}\left(x\right) \\
& && \alpha\left(x\right) \approx \alpha^{0}\left(x\right) + \alpha^{(1)}\left(x\right) + \alpha^{(2)}\left(x\right) + O\left(\varepsilon^{3}\right)
\end{aligned} \tag{B.3}$$

Die Lösung dieser Bestimmungsgleichungen selbst erfolgt durch unbestimmte Integrationen, wobei in der jeweils nächsten Gleichung die aus der vorausgehenden Gleichung bestimmte Lösung einzutragen ist. Der endliche Konvergenzradius der so entstehenden Potenzreihe zwingt zur (analytischen) Fortsetzung, will man ein größeres x-Intervall schrittweise überdecken. Über die Größe des Konvergenzradius lässt sich keine allgemein gültige Aussage machen.

Anhang C

Variation der Konstanten

Ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen 1.Ordnung

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{f}(x)\,\mathbf{y} + \mathbf{g}(x) \tag{C.1}$$

wird nach der Methode der ***Variation der Konstanten*** gelöst durch

$$\mathbf{y}(x) = \left(\mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \mathbf{g}(t) \exp\left(-\mathbf{F}(t)\right) dt \right) \exp\left(\mathbf{F}(x)\right)$$

$$mit \quad \mathbf{F}(x) = \int_{x_0}^{x} \mathbf{f}(t)\, dt \tag{C.2}$$

Um diesen Lösungsweg gehen zu können, muss die Differentialgleichung die obige Gestalt besitzen, was in einigen Anwendungen der Fall ist.

Beispiel: Versucht man die Bewegung eines Satelliten im Gravitationsfeld der Erde nach dem Lindsted-Poincare-Verfahren zu lösen, so sind Differentialgleichungen der obigen Gestalt zu lösen (M3).

Anhang D

Bemerkungen zur Hamiltonisierung

Die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}, t\right) \tag{D.1}$$

soll auf kanonische Gestalt gebracht werden. Dazu wird nach Giacaglia ein adjungierter Satz von Variablen eingeführt gemäß (S3)

$$\tilde{H}\left(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t\right) := \overline{\mathbf{y}}\mathbf{f}\left(\mathbf{x}, t\right) \tag{D.2}$$

Mit der so definierten Hamilton-Funktion $\tilde{H}\left(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t\right)$ erhält man die kanonischen Gleichungen

$$\dot{\mathbf{x}} = \tilde{H}_{\mathbf{y}} \quad \textit{und} \quad \dot{\mathbf{y}} = -\tilde{H}_{\mathbf{x}} \tag{D.3}$$

Die Variablen $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ sind kanonisch konjugiert. Die Hamiltonisierung der obigen Differentialgleichung, die übereinstimmt mit der ersten kanonischen Gleichung

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \mathbf{y}} = \frac{\partial\left(\overline{\mathbf{y}}\mathbf{f}\left(\mathbf{x}, t\right)\right)}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}, t\right) \tag{D.4}$$

während die zweite Gleichung ein neues Bewegungsproblem definiert

$$\dot{\mathbf{y}} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \mathbf{x}} = -\frac{\partial\left(\overline{\mathbf{y}}\mathbf{f}\left(\mathbf{x}, t\right)\right)}{\partial \mathbf{x}} = -\overline{\mathbf{y}}\frac{\partial \mathbf{f}\left(\mathbf{x}, t\right)}{\partial \mathbf{x}} \tag{D.5}$$

Die beiden Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}, t\right) \\ \dot{\mathbf{y}} &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \mathbf{x}} = -\overline{\mathbf{y}}\frac{\partial \mathbf{f}\left(\mathbf{x}, t\right)}{\partial \mathbf{x}} \end{aligned} \tag{D.6}$$

sind gekoppelt und beide zusammen beschreiben in kanonischer Form ein gekoppeltes System, was für die Einzelsysteme i.allg. nicht zutrifft.

Am Beispiel des van der Polschen Oszillators wird das in (M3) veranschaulicht.

Anhang E

Gekoppelte Oszillatoren + Lineare Kette

Bewegungsgleichungen der gekoppelten Oszillatoren (G1, M1)

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{X} &= -a_1 X - b_1 X - b\left(X - Y\right) \\ &= -\left(a_1 + b_1 + b\right) X - bY \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_2 \ddot{Y} &= -a_2 Y - b_2 Y - b\left(Y - X\right) \\ &= -\left(a_2 + b_2 + b\right) Y + bX \end{aligned}$$

$$\hat{=} \begin{pmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_X \\ F_Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{E.1}$$

Gesucht sind periodische / quasiperiodische Lösungen der Bewegungsgleichungen nach der *Methode der unendlich vielen Variablen* (S2)

Ansatz:

$$\begin{aligned} X\left(t_n\right) &= \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(X_\nu^s \overline{\Phi}_\nu^{B,s}\left(t_n\right) + X_\nu^c \overline{\Phi}_\nu^{B,c}\left(t_n\right)\right) \\ Y\left(t_n\right) &= \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(Y_\nu^s \overline{\Phi}_\nu^{B,s}\left(t_n\right) + Y_\nu^c \overline{\Phi}_\nu^{B,c}\left(t_n\right)\right) \end{aligned} \tag{E.2}$$

Eintragen dieser Ansätze in die rechten Seiten der Bewegungsgleichungen ergibt

$$\begin{aligned} &-\left(a_1 + b_1 + b\right) X - bY \\ &\rightarrow -\left(a_1 + b_1 + b\right) X_\nu^{s,c} - bY_\nu^{s,c} \\ \\ &-\left(a_2 + b_2 + b\right) Y + bX \\ &\rightarrow -\left(a_2 + b_2 + b\right) Y_\nu^{s,c} + bX_\nu^{s,c} \end{aligned} \tag{E.3}$$

und nach Eintragen auch auf den linken Seiten, beachtet man

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X}{dt^2} &= \frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(X_\nu^s \overline{\Phi}_\nu^{B,s}\left(t_n\right) + X_\nu^c \overline{\Phi}_\nu^{B,c}\left(t_n\right)\right)\right) = \\ &= \frac{1}{T^2}\frac{d}{dt^2{}_n}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(X_\nu^s \overline{\Phi}_\nu^{B,s}\left(t_n\right) + X_\nu^c \overline{\Phi}_\nu^{B,c}\left(t_n\right)\right)\right) \\ &= -\frac{\left(2\nu\pi\right)^2}{T^2} \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(X_\nu^s \overline{\Phi}_\nu^{B,s}\left(t_n\right) + X_\nu^c \overline{\Phi}_\nu^{B,c}\left(t_n\right)\right) \end{aligned} \tag{E.4}$$

Analog für Y die Bedingungsgleichungen für ganzperiodische Lösungen

$$-\frac{(2\nu\pi)^2}{T^2} X_\nu^{s,c} = -(a_1+b_1+b) X_\nu^{s,c} - bY_\nu^{s,c}$$
$$\Rightarrow X_\nu^{s,c}\left[\frac{(2\nu\pi)^2}{T^2} - (a_1+b_1+b)\right] = +bY_\nu^{s,c}$$
$$-\frac{(2\nu\pi)^2}{T^2} Y_\nu^{s,c} = -(a_2+b_2+b) Y_\nu^{s,c} + bX_\nu^{s,c}$$
$$\Rightarrow Y_\nu^{s,c}\left[\frac{(2\nu\pi)^2}{T^2} - (a_2+b_2+b)\right] = -bX_\nu^{s,c} \tag{E.5}$$

$$\begin{pmatrix} \left[\frac{(2\nu\pi)^2}{T^2} - (a_1+b_1+b)\right] & -b \\ b & \left[\frac{(2\nu\pi)^2}{T^2} - (a_2+b_2+b)\right] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_\nu^{s,c} \\ Y_\nu^{s,c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{E.6}$$

Dieses homogene lineare Gleichungssystem hat eine nicht-triviale Lösung, wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet, d.h. wenn gilt

$$\left(\frac{(2\nu\pi)^2}{T^2}\right)^2 - \frac{(2\nu\pi)^2}{T^2}\left\{(a_1+b_1+b)+(a_2+b_2+b)\right\} + (a_1+b_1+b)(a_2+b_2+b) + b^2 = 0$$
$$\rightarrow (2\nu\pi)^4 - (2\nu\pi)^2 T^2 \left\{(a_1+b_1+b)+(a_2+b_2+b)\right\} - T^4 b^2 = 0$$
$$\rightarrow T^4 = \frac{1}{b^2}\left[(2\nu\pi)^4 - (2\nu\pi)^2 T^2 \left\{(a_1+b_1+b)+(a_2+b_2+b)\right\}\right]$$
$$\rightarrow T^2 = \frac{(2\nu\pi)^2}{b}\sqrt{\left[1 - \frac{T^2}{(2\nu\pi)^2}\left\{(a_1+b_1+b)+(a_2+b_2+b)\right\}\right]} \tag{E.7}$$

Mit den Bezeichnungen

$$A := \left(\frac{2\nu\pi}{T}\right)^2 \quad und \quad B := \frac{1}{2}\left\{(a_1+b_1+b)+(a_2+b_2+b)\right\} \tag{E.8}$$

kann man

$$\left(\frac{(2\nu\pi)^2}{T^2}\right)^2 - \frac{(2\nu\pi)^2}{T^2}\left\{(a_1+b_1+b)+(a_2+b_2+b)\right\} + (a_1+b_1+b)(a_2+b_2+b) + b^2 = 0 \tag{E.9}$$

umschreiben in

$$A^2 - 2AB + (\ )(\ ) + b^2 = 0$$

nach qudratischer Ergänzung (E.10)

$$(A-B)^2 - B^2 - (\ )(\ ) - b^2 = 0$$

Löst man nach *A* auf

$$A = B - B^2 - (\ )(\ ) - b^2 = 0 \tag{E.11}$$

so folgt für die Periode *T*

$$T = \frac{2\nu\pi}{B - \sqrt{B^2 - (\ )(\ ) - b^2}}$$

$$\Rightarrow bzw.\ mit\ B := \frac{1}{2}\{\ \}$$

$$T = \frac{2\nu\pi}{\frac{1}{2}\{\ \} - \sqrt{\left(\frac{1}{2}\{\ \}\right)^2 - (\ )(\ ) - b^2}} =$$

$$T = \frac{2\nu\pi}{\frac{1}{2}\{(\ ) + (\ )\} - \sqrt{\left(\frac{1}{2}\{(\ ) + (\ )\}\right)^2 - (\ )(\ ) - b^2}} \tag{E.12}$$

bzw. nach Eintragen der Bezeichnungen (E.8)

$$T = \frac{2\nu\pi}{\frac{1}{2}\{(a_1+b_1+b)+(a_2+b_2+b)\}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{(a_1+b_1+b)(a_2+b_2+b)-b^2}{\left(\frac{1}{2}\{(a_1+b_1+b)+(a_2+b_2+b)\}\right)^2}}\right)} \tag{E.13}$$

Im *Sonderfall nicht* gekoppelter Oszillatoren erhält man wegen

$$b \to 0 \text{ und } b_1, b_2 \to 0 \text{ und } a_1 = a_2 \tag{E.14}$$

die Bedingungsgleichungen für den freien harmonischen Oszilllator mit der Periodenlänge *T* (S2)

$$-\frac{(2\nu\pi)^2}{T^2} X_\nu^{s,c} = -a_1 X_\nu^{s,c}$$

$$\Leftrightarrow X_\nu^{s,c}\left(\frac{(2\nu\pi)^2}{T^2} - a_1\right) = 0$$

$$\rightarrow T^2 = \frac{a_i}{(2\nu\pi)^2} \rightarrow T = \frac{\sqrt{a_i}}{2\nu\pi} \;\; \mathit{für} \;\; i = 1,2$$

$$-\frac{(2\nu\pi)^2}{T^2} Y_\nu^{s,c} = -a_2 Y_\nu^{s,c}$$

$$\Leftrightarrow Y_\nu^{s,c}\left(\frac{(2\nu\pi)^2}{T^2} + a_2\right) = 0$$

(E.15)

Die vorstehenden Überlegungen lassen sich auf lineare Ketten und Ringe (G1, M1), und auf flächenhaft und räumlich verteilte gekoppelte harmonische Oszillatoren ausdehnen. Das dürfte für die Untersuchung der Ringsysteme der Planeten (S3) von Interesse sein.

Anhang F

Anwendung der Methode der unendlichen vielen Variablen auf die Lorenzgleichungen

Die Lorenzgleichungen der Atmosphärendynamik (P1) lauten

$$\begin{aligned}
&\frac{dX}{dt*} = -\sigma X + \sigma Y \\
&\frac{dY}{dt*} = -XZ + rX - Y \qquad && \text{mit} \quad b = \frac{4}{a^2+1} \\
&\frac{dZ}{dt*} = XY - bZ && \sigma = \frac{\nu}{\kappa} = \frac{\text{kinematische Zähigkeit}}{\text{Wärmeleitfähigkeit}} \\
& && t* := \frac{\pi^2\left(a^2+1\right)}{h^2} t \quad \text{dimensionslos}
\end{aligned} \tag{F.1}$$

Differenziert man die Lorenzgleichungen nach der Zeit, so erhält man

$$\begin{aligned}
&\frac{dX}{dt*} = -\sigma X + \sigma Y \\
&\Rightarrow \frac{d^2X}{dt^2} = -\sigma \frac{dX}{dt} + \sigma \frac{dY}{dt} \\
&\Rightarrow \frac{d^2X}{dt^2} = -\sigma\left(-\sigma X + \sigma Y\right) + \sigma\left(-XZ + rX - Y\right)
\end{aligned} \tag{F.2a}$$

analog für die beiden anderen Komponenten

$$\frac{dY}{dt*} = -XZ + rX - Y \Rightarrow \frac{d^2Y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(-XZ + rX - Y\right) \tag{F.2b}$$

$$\frac{dZ}{dt*} = XY - bZ \Rightarrow \frac{d^2Z}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(XY - bZ\right) \tag{F.2c}$$

bzw. (im Folgenden wird der Stern an der unabhängigen Variablen weggelassen!). Also

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2X}{dt^2} = -\sigma \frac{dX}{dt} + \sigma \frac{dY}{dt} \\
&\Rightarrow \frac{d^2X}{dt^2} = -\sigma\left(-\sigma X + \sigma Y\right) + \sigma\left(-XZ + rX - Y\right)
\end{aligned} \tag{F.3a}$$

Das ist eine Schwingungsgleichung für die X-Komponente

Analog bekommt man für die beiden anderen Komponenten

$$\frac{d^2Y}{dt^2} = -\sigma(\sigma - r)YZ - \left(X^2Y - bXZ\right) + XZ - rX + Y \tag{F.3b}$$

$$\frac{d^2Z}{dt^2} = (-\sigma X + \sigma Y)Y + X(-XZ + rX - Y) - b(XY - bZ) \tag{F.3c}$$

so dass nach einfacher Umstellung die Gleichungen folgen

$$\begin{aligned}
\frac{d^2X}{dt^2} - \left(\sigma^2 + \sigma r\right)X &= -\sigma^2 Y + \sigma(-XZ - Y) \\
\frac{d^2Y}{dt^2} - \quad Y &= -\sigma(\sigma - r)YZ - \left(X^2Y - bXZ\right) + XZ - rX \\
\frac{d^2Z}{dt^2} - \quad b^2 Z &= +(-\sigma X + \sigma Y)Y + X(-XZ + rX - Y) - bXY
\end{aligned} \tag{F.4}$$

Das sind drei Schwingungsgleichungen für die gesuchten Funktionen $X(t), Y(t), Z(t)$, genauer drei gekoppelte harmonische Oszillatoren, vorausgesetzt

$$\left(\sigma^2 + \sigma r\right) \text{ und } b^2 \tag{F.5}$$

sind reell und positiv. Davon kann ausgegangen werden.

Die Schwingungsgleichungen sind lösbar u.a. mittels Laplace-Transformation (B1, M3) oder Iteration oder nach der Methode der unendlich vielen Variablen (H1).

Zur Bestimmung periodischer Lösungen dieser Gleichungen würde man etwa wie folgt verfahren (S3):

In den Gleichungen treten Produkte der Komponenten X, Y, Z auf. Um diese nach den Eigenfunktionen zu entwickeln, ist folgende Aufgabe zu lösen.

Gegeben sei die Reihe nach Eigenfunktionen

$$\begin{aligned}
f(t_n) &= f_0 \quad + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(f_\nu^s \overline{\varphi}_\nu^s(t_n) + f_\nu^c \overline{\varphi}_\nu^c(t_n)\right) \\
&=: \quad f_0 + \qquad \tilde{F}(t_n)
\end{aligned} \tag{F.6}$$

und analog eine weitere Reihe

$$g(t_n) = g_0 + \tilde{G}(t_n) \tag{F.7}$$

Beide Reihen sollen verknüpft werden, z. B. durch Multiplikation, und das Ergebnis als gleichartig aufgebaute Reihe

$$h(t_n) = h_0 + \tilde{H}(t_n) \tag{F.8}$$

dargestellt werden. Man erhält so für die Reihenkoeffizienten (S3)

$$\begin{aligned}
h_0 &= f_0 g_0 + \sum_{\sigma=1}^{\infty} \left(f_\sigma^s g_\sigma^s + f_\sigma^c g_\sigma^c \right) \\
h_\nu^s &= f_\sigma g_\nu^s + g_0 f_\nu^s + \sum_{\sigma=1}^{\infty} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \left(f_\sigma^s g_\lambda^c A_{\nu\sigma\lambda}^{ssc} + f_\sigma^c g_\lambda^s A_{\nu\sigma\lambda}^{scs} \right) \\
h_\nu^c &= f_\sigma g_\nu^c + g_0 f_\nu^c + \sum_{\sigma=1}^{\infty} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \left(f_\sigma^s g_\lambda^s A_{\nu\sigma\lambda}^{css} + f_\sigma^c g_\lambda^c A_{\nu\sigma\lambda}^{ccc} \right)
\end{aligned} \tag{F.9}$$

Die Größen $A_{\nu\sigma\lambda}^{sss}$ *etc.* sind bekannt.

Damit lassen sich die rechten Seiten der Schwingungsgleichungen einheitlich als gleichartig aufgebaute Reihen angeben. Aus diesen müssen dann die gesuchten Koeffizienten der Lösungsreihe ermittelt werden. Das erweist sich als aufwendiger als im Falle des harmonischen Oszillators (S2). Dabei könnte auch der ***Satz von Helge von Koch*** hilfreich sein (S4).

Reports in the *CGE Reports* series (ISSN 2195-7126)
Veröffentlichungen in der Schriftenreihe „CGE Reports“ (ISSN 2195-7126)

No. 1: Pail R., Hugentobler U., Rummel R., Seitz F., Bosch W., Angermann D., Steigenberger P., Gruber T., Bouman J., Schmidt M., Völksen C., Neidhardt A., Schreiber U., Horwath M. (2012): Research and Development Programme 2011–2015, Forschungs- und Entwicklungsprogramm 2011–2015, ISBN 978-3-934205-32-1.

No. 2: Yi, Weijong (2012): The Earth’s gravity field from GOCE, ISBN 978-3-934205-34-5.

No. 3: Schlie, J. (2012): Die GETRIS Mission – Konzeptstudie einer zukünftigen Schwerefeldmission zur Beobachtung von Massentransportprozessen im System Erde, ISBN 978-3-934205-33-8.

No. 4: Ettl, M. (2013): Hochgenaue numerische Lösung von Bewegungsproblemen mit frei wählbarer Stellengenauigkeit, ISBN 978-3-934205-35-2.

No. 5: Schneider, M. (2014): Zur Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen, ISBN 978-3-934205-36-9.

No. 6: Albertella, A., Rummel, R. (2014): GOCE geoid, mean dynamic ocean topography and geostropic velocities, ISBN 978-3-934205-37-6.

No. 7: Schneider, M. (2014): Gravitationsfeldbestimmung nach der Integralgleichungsmethode, ISBN 978-3-934205-38-3.

ISSN 2195-7126
ISBN 978-3-934205-38-3