CGE

Centre of Geodetic Earth System Research

# Zur Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen

**Manfred Schneider**

CGE Report 5
2014

**Imprint**

Centre of Geodetic Earth System Research (CGE), a collaboration between

Institute of Astronomical and Physical Geodesy (IAPG)
Technische Universität München
Arcisstraße 21, D-80333 München

Research Facility Satellite Geodesy (FESG)
Technische Universität München
Arcisstraße 21, D-80333 München

Commission for Geodesy and Glaciology (KEG), Geodesy Section
Bavarian Academy of Sciences and Humanities
Alfons-Goppel-Str. 11, D-80539 München

German Geodetic Research Institute (DGFI)
Alfons-Goppel-Str. 11, D-80539 München

This work is published as Number 5 in the *CGE Reports* series. An electronic version is available from http://www.cge-munich.de.

**Impressum**

Centrum für Geodätische Erdsystemforschung (CGE), eine Kooperation zwischen

Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie (IAPG)
Technische Universität München
Arcisstraße 21, D-80333 München

Forschungseinrichtung Satellitengeodäsie (FESG)
Technische Universität München
Arcisstraße 21, D-80333 München

Kommission für Erdmessung und Glaziologie (KEG), Abteilung Erdmessung
Bayerische Akademie der Wissenschaften
Alfons-Goppel-Str. 11, D-80539 München

Deutsches Geodätisches Forschungsinstitut (DGFI)
Alfons-Goppel-Str. 11, D-80539 München

Diese Arbeit wird als Nummer 5 der Schriftenreihe „CGE Reports“ veröffentlicht. Eine elektronische Version ist unter http://www.cge-munich.de erhältlich.

E-mail: info@cge-munich.de
Homepage: http://www.cge-munich.de

München, 2014

ISSN 2195-7126
ISBN 978-3-934205-36-9

Centre of Geodetic Earth System Research

# Zur Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen

**Manfred Schneider**

CGE Report 5
2014

# *Vorwort*

In der vorliegenden Studie wird versucht, einen Weg aufzuzeigen, die Bewegung eines Kontinuums unter Verwendung von Lie-Reihen darzustellen. Der Lösungsweg wird am Beispiel eines Fluids veranschaulicht.

Motiviert wurde die Studie u.a. durch die noch immer ungelöste Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit globaler glatter Lösungen der dreidimensionalen Navier-Stokes-Gleichungen (S1).

Leitgedanke des Vorgehens ist die Hamiltonisierung der mechanisch-thermodynamischen Bilanzgleichungen, um die Lösungsverfahren der Hamiltonschen Mechanik zu erschließen. Die in der Himmelsmechanik erfolgreich in den letzten Jahrzehnten eingesetzten Lie-Reihen könnten auch in der Kontinuumsmechanik vorteilhaft sein.

Da sich neben Anfangswertaufgaben auch vielfältige Randwertaufgaben stellen, wird für solche die Verwendung von Entwicklungen nach Eigenfunktionen vorgeschlagen, also die auf Hammerstein zurückgehende Methode der unendlich vielen Variablen der Lösung von Integralgleichungen. Bucerius (S2) hat die Methode in der ersten Hälfte des vorigen Jahrhunderts in seiner Integralgleichungstheorie des Sternaufbaus angewendet. Sie wurde vom Verfasser (S2) für Bahn- und Parameterbestimmungsaufgaben der Satellitengeodäsie eingeführt. In den neueren Satellitenmissionen CHAMP, GRACE und GOCE wurde sie erfolgreich zur Gravitationsfeldbestimmung in der Forschungsgruppe Satellitengeodäsie sowie an der Universität Bonn (Arbeitsgruppe Prof. Ilk) und an der Technischen Universität Graz (Prof. Mayer-Gürr) eingesetzt. Verwiesen sei auch auf CGE Report No. 2, in dem Dr. W. Yi die Integralgleichungsmethode im Zeitbereich auf GOCE-Meßdaten anwendet.

Regensburg, im Juni 2013 Manfred Schneider

# *Inhaltsverzeichnis*

# 1 Einführung in die Aufgabenstellung

Für ein einkomponentiges nichtpolares räumlich begrenztes Kontinuum bestehen die folgenden mechanisch-thermodynamischen Bilanzgleichungen (B1,E1), geht man von der lokalen zur materiellen Zeitableitung über (S2)

$$\frac{d\rho}{dt} = -\nabla_{\mathbf{r}} \bullet \mathbf{v}$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{f} + \nabla_{\mathbf{r}} \bullet \mathbf{T}$$

$$\rho \frac{du}{dt} = -\nabla_{\mathbf{r}} \bullet \mathbf{q} + r + Spur\left(\mathbf{T} \nabla_{\mathbf{r}}^{T} \mathbf{v}\right)$$

$$\rho \frac{ds}{dt} = \rho b + \nabla_{\mathbf{r}} \bullet \mathbf{J}_{s} \geq 0 \qquad (1.1)$$

Darin bedeuten

$\rho(\mathbf{r},t)$ *Massendichte des Kontinuums am Ort* $\mathbf{r}$ *zum Zeitpunkt* $t$

$\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ *Geschwindigkeit des materiellen Punktes am Ort* $\mathbf{r}$ *zum Zeitpunkt* $t$

$u(\mathbf{r},t)$ *spezifische innere Energie*

$s(\mathbf{r},t)$ *spezifische Entropie*

die mechanisch-thermodynamischen Bilanzgrößen des Kontinuums, die Größen $\mathbf{f},\mathbf{T}$ Platzhaltesymbole für Massen- und Flächenkräfte, $r$ die Quellstärke der nichtmechanischen Leistungsquellen/-senken und $b$ die Entropieerzeugung. Es bedeutet weiter $\boldsymbol{r}$ den Ortsvektor des materiellen Punktes $\xi$ in der aktuellen Konfiguration des Kontinuums, $\xi$ denjenigen in der Referenzkonfiguration, so daß $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi,t)$ die Bahn des materiellen Punktes im zugrunde gelegten Bezugs-system beschreibt und

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}(\xi,t)}{dt}$$

dessen Geschwindigkeit**.**

Zu den Milleniumsaufgaben, die das Clay Mathematics Institute (S1) ausgelobt hat, zählt die folgende Fragestellung:

Betrachtet werde ein nichtpolares, inkompressibles, einkomponentiges Fluid unter der Wirkung von Massen- und Flächenkräften, d.h. Eigen- und Fremd-gravitation sowie endogenen Flächenkräften, beispielsweise infolge von Viskosität. Angenommen werde die Erhaltung der Gesamtmasse des Fluids. Außerdem soll keine Entropieänderung betrachtet werden.

Dann lauten die mechanisch-thermodynamischen Bilanzgleichungen (S2)

$$\frac{d\rho}{dt} = -\nabla_{\mathbf{r}} \bullet \mathbf{v} \qquad \text{lokale Massenbilanz}$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{f} + \frac{1}{\rho} \nabla_{\mathbf{r}} \bullet \mathbf{T} \qquad \text{lokale Impulsbilanz} \tag{1.2}$$

Für den Spannungstensor wird folgendes Modell gewählt

$$\begin{aligned}
&\mathbf{T} := \underbrace{-p\mathbf{I}}_{Drucktensor} + \underbrace{\mathbf{T}^{(visk)}}_{Viskositätstensor} \\
&\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \eta Spur\left(\mathbf{V}\right)\mathbf{I} \\
&p \;\; Druck \\
&\eta \; Koeffizient \; der \; Scherungsviskosität \\
&\mathbf{V} \; Tensor \; der \; Verzerrungsgeschwindigkeiten
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Die Zähigkeit eines inkompressiblen Fluid werde durch einen einzigen Koeffizienten $\eta$ beschrieben, den Koeffizienten der Scherungsviskosität. Wenn sich diese im Fluid nur unwesentlich ändert,so vereinfacht sich die lokale Impulsbilanz zur Gleichung

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla_{\mathbf{r}} p + \eta \Delta \mathbf{v} \tag{1.4}$$ .

Hinzuzunehmen ist die lokale Massenbilanz, so daß die Navier-Stokes-Gleichungen (S1,G1,L1)

$$\frac{d\rho}{dt} = -\nabla_{\mathbf{r}} \bullet \mathbf{v} \qquad \text{lokale Massenbilanz}$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla_{\mathbf{r}} p + \eta \Delta \mathbf{v} \qquad \text{lokale Impulsbilanz} \tag{1.5}$$

bestehen. Aus ihnen soll die Bewegung des nichtpolaren, inkompressiblen einkomponentigen zähen Fluids bestimmt werden, d.h. es soll seine aktuelle Konfiguration zum Zeitpunkt *t* aus der Referenzkonfiguration zum Zeitpunkt $t_0$

$$\xi \to \mathbf{r} = \mathbf{r}\left(\xi, t\right) \tag{1.6}$$

bei Vorliegen von Anfangs- bzw. (zeitlichen) Randbedingungen ermittelt werden. Gezeigt werden soll, ob eine globale, eindeutig bestimmte und glatte Lösung existiert.
Gesucht sind somit die zeitliche Entwicklung des (S1)

Geschwindigkeitsfeldes $\mathbf{v}\left(\xi,t\right) = \mathbf{v}\left(\mathbf{r}\left(\xi,t\right),t\right)$ (1.7)

Druckfeldes $p\left(\xi,t\right) = p\left(\mathbf{r}\left(\xi,t\right),t\right)$ (1.8)

und der Dichteverteilung $\rho\left(\xi,t\right) = \rho\left(\mathbf{r}\left(\xi,t\right),t\right)$ (1.9)

des betrachteten nichtpolaren inkompressiblen viskosen Fluids, das in der Referenzkonfiguration ein begrenztes Gebiet $\Omega_{t_0} \subset \mathbb{R}^3$ ausfüllt und dessen materielle Punkte dort durch die Ortsvektoren $\xi$ indiziert sind. Die Ortsvektoren in der aktuellen Konfiguration ergeben sich durch Quadratur aus dem Geschwindigkeitsfeld zu

$$\xi \to \mathbf{r}\left(\xi,t\right) : \mathbf{r}\left(\xi,t\right) = \int_{t_0}^{t} \mathbf{v}\left(\xi,\tau\right) d\tau . \tag{1.10}$$

Dadurch ist dann auch das vom Fluid zum Zeitpunkt *t* ausgefüllte Gebiet festgelegt (S2)

$$\Omega_{t_0} \subset \mathbb{R}^3 \quad \to \quad \Omega_t \subset \mathbb{R}^3 . \qquad \text{(1.11)s}$$

Im Folgenden sollen himmelsmechanisch motivierte Möglichkeiten zur Untersuchung der Bewegung eines einfach zusammenhängenden einkomponentigen, nichtpolaren Kontinuums behandelt werden, und zwar exemplarisch die Navier-Stokes-Gleichungen.

Die Lösung dieser Gleichungen wird überwiegend mit numerischen Verfahren versucht. Aber (S1)

> *„Die Konvergenz numerischer Verfahren ist nur bei Glattheit der Lösungen garantiert. Können die Lösungen der Navier-*

*Stokes-Gleichungen nach endlicher Zeit irregulär werden, so ist unklar, ob die numerischen Verfahren tatsächlich die Wirklichkeit richtig wiedergeben.“*

Die Bedeutung eines Nachweises der globalen Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen hätte auch hohe Bedeutung für die Frage der Turbulenz (S1):

> *„Gilt die globale Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen, so ist Turbulenz im Innern einer Flüssigkeit ein endlich-dimensionales Phänomen, das mittels klassischer Chaostheorie beschrieben werden kann. Gilt sie nicht, so ist Turbulenz ein echt unendlich-dimensionales Phänomen. Im zweiten Falle wären die verwendeten konstitutiven Gesetze nicht mehr gültig. Die Navier-Stokes-Gleichungen wären ein schlechtes Modell der Wirklichkeit.“*

# 2 Zur Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen

Die Navier-Stokes-Gleichungen seien zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung zusamengefaßt, indem die Vektoren

$$\mathbf{x} := \begin{Bmatrix} \rho \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} \equiv \left(\rho, \mathbf{v}\right)^T \qquad \mathbf{F}\left(\mathbf{x}, t\right) := \begin{pmatrix} -\frac{1}{\rho} \nabla_{\mathbf{r}} \bullet \mathbf{v} \\ \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla_{\mathbf{r}} p + \frac{\eta \Delta \mathbf{v}}{\rho} \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

eingeführt werden. Man erhält so

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}\left(\mathbf{x}, t\right) \tag{2.2}$$

Das ist eine i.allg. nichtautonome gewöhnliche Differentialgleichung Die explizite Zeitabhängigkeit der rechten Seite rührt meist von den Massenkräften her, vor allem dann, wenn sie auf Gravitation zurückzuführen sind.

In den folgenden Abschnitten werden Verfahren zur Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen behandelt. Dabei werden die Fälle

$$\frac{\partial \mathbf{F}\left(\mathbf{x}, t\right)}{\partial t} = \begin{cases} 0 & \mathit{autonom} \\ \neq 0 & \mathit{nichtautonom} \end{cases} \quad \text{und Vorgabe von} \begin{cases} \mathit{Anfangswerten} & \mathit{AWA} \\ \mathit{Randwerten} & \mathit{RWA} \end{cases} \tag{2.3}$$

unterschieden. Hier wird im wesentlichen der autonome Fall behandelt.

## 2.1 Lösung von Anfangswertaufgaben

Vorgegeben seien Anfangswerte

$$\mathbf{x}\left(t_0\right) = \mathbf{x}_0 \tag{2.4}$$

der die Lösung $\mathbf{x}\left(t\right)$ der Differentialgleichung zur Epoche $t = t_0$ genügen soll.

### *2.1.1 Nichtautonomer Fall*

Im nichtautonomen Fall ist eine Lösung der Gleichung

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \tag{2.5}$$

aufzusuchen: $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) \;\; mit \;\; \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ (2.6)

#### *2.1.1.1 Potenzeihen- bzw. Taylorreihenansatz*

Als Lösungsansatz soll eine Potenz-/Taylorreihe verwendet werden

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathbf{x}_\nu (t - t_0)^\nu$$
$$mit \quad \mathbf{x}_\nu = \frac{1}{\nu!}\mathbf{x}^{(\nu)}(t_0) = \frac{1}{\nu!}\mathbf{F}_\nu(t_0, \mathbf{x}_0) \;\; und \;\; \mathbf{F}_1(t, \mathbf{x}) = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}) \tag{2.7}$$

Die Reihenkoeffizienten können rekursiv gewonnen werden.

Wie in (E1) gezeigt, besteht die Rekursionsformel

$$\mathbf{F}_{\nu+1}(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{F}_\nu(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_\nu(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \bullet \mathbf{F}(t, \mathbf{x}) \;\; für \;\; \nu \geq 1 \tag{2.8}$$

für die Koeffizienten der Lösungsreihe, deren führender Term gerade die geforderten Anfangswerte darstellt.

#### *2.1.1.2 Verwendung von Lie-Reihen*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \tag{2.9}$$

Um diese Gleichungen auf kanonische Gestalt zu bringen, werde im autonomen Fall eine durch (S2)

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \mathbf{y} \bullet \mathbf{F}(\mathbf{x}) \tag{2.10}$$

definierte Hamilton-Funktion eingeführt, womit folgt

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}} \qquad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \ . \tag{2.11}$$

Diese Gleichungen sind von kanonischer Gestalt, wobei die erste Hälfte

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \tag{2.12}$$

mit dem Ausgangssystem übereinstimmt.

Hinzukommt ein weiteres System von Differentialgleichungen für die adjungierten Variablen ***y***

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = -\mathbf{y} \bullet \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \tag{2.13}$$

Die Hamiltonisierung gelingt über eine Verdopplung der Anzahl der Variablen und Differentialgleichungen. Gesucht sind die Funktionen

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi, t) \quad und \quad \mathbf{y} = \mathbf{y}(\xi, t) \ . \tag{2.14}$$

Mit der Hamilton-Funktion *H* und dem durch Poisson-Klammerbildung definierten Lie-Operator

$$D := \{\ ; H\} \tag{2.15}$$

kann die Lösung der kanonischen Gleichungen (2.11) durch Lie-Reihen dargestellt werden

$$\mathbf{x}(\xi, t) = \exp\left(\left(t - t_0 D\right)\right)\mathbf{x}_0 \quad Anfangsbedingung \ \mathbf{x}_0 := \mathbf{x}(\xi, t = t_0) \tag{2.16}$$

analog für die kanonisch konjugierten Variablen $\mathbf{y}(\xi, t)$ .
Ausführlicher angeschrieben lautet die Reihe für die Variablen $\mathbf{x}(\xi, t)$

$$\mathbf{x}(\xi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t - t_0)^n}{n!} \left(D^n H\right)_{\mathbf{x}_0} = \mathbf{x}_0 + \frac{(t - t_0)}{1!} (DH)_{\mathbf{x}_0} + \frac{(t - t_0)^2}{2!} (DDH)_{\mathbf{x}_0} + .... \tag{2.17}$$

analog für die kanonisch konjugierten Variablen $\mathbf{y}(\xi, t)$ .

Das sind Potenz-/Taylorreihen in der Zeit um den Entwicklungspunkt $t_0$. Die Reihenkoeffizienten ergeben sich durch fortgesetzte Poissonklammerbildung mit der Hamilton-Funktion *H*.

#### *2.1.1.3 Konvergenzradius und analytische Fortsetzung*

Die Lie-/Taylor-/Potenz- Reihen weisen meist ein endliches Konvergenzintervall auf, so daß man in der Regel keine globale Lösung erhält. Wenn die Reihen aber analytisch über das Konvergenzintervall hinaus fortsetzbar sind, dann kann man unter bestimmten Voraussetzungen eine globale Lösung für die Differentialgleichung bekommen. Zu dieser Frage seien einige Aussagen insbesondere aus der Funktionentheorie zusammengestellt:

So wird in (G2) der folgende auf der Cauchyschen Majorantenmethode basierende Satz angegeben:

***Satz*** *Sind die Funktionen* $\vartheta_k(z)$ *in dem durch*

$$D := \vartheta_1(z)\frac{\partial}{\partial z_1} + \vartheta_2(z)\frac{\partial}{\partial z_2} + \ldots + \vartheta_n(z)\frac{\partial}{\partial z_n}$$

$$\textit{mit den komplexen Variablen } z := (z_1, \ldots, z_n)^T \tag{2.18}$$

*definierten Lie-Operator sowie die Funktion* $f(z)$ *aus der*

*Differentialgleichung* $\frac{dz}{dt} = f(z)$

*in einem gewissen n-Kreis*

$$|z_i - a_i| < \rho \tag{2.19}$$

*eines Gebietes* $G$ *holomorph und gilt in demselben n-Kreis*

$$|\vartheta_k(z)| \le N \quad k = 1, \ldots, n \,, \tag{2.20}$$

*so konvergiert die Lie-Reihe*

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} D^\nu f(z) \tag{2.21}$$

*wenigstens für den Bereich*

$$\left|z_i - a_i\right| \le y < \rho \qquad und \qquad \left|t\right| < T = \frac{\rho}{\left(n+1\right)N}\left(1-\frac{y}{\rho}\right)^{n-1} \tag{2.22}$$

*Ist $G$ ein kompaktes Gebiet des z-Raumes, so kann eine für ganz $G$ gültige positive Schranke T angegeben werden.*

Eine andere Beweisführung gibt (E1), wobei auf reellwertige Funktionen abgestellt ist, was der oben angeführten rekursiven Darstellung der Reihen-koeffizienten entgegenkommt.

Mit dem vorstehenden Satz ist sichergestellt, daß unter den angegebenen Bedingungen die Lösungsdarstellung durch eine Lie-Reihe einen positiven Konvergenzradius hat und darüberhinaus analytisch fortsetzbar ist. Führt man dies wiederholt durch, so erhält man möglicherweise aus dem anfänglichen Funktionselement eine ***globale*** Lösung, sofern nicht

*„... der Fall eintritt, daß die Schnittpunkte der aufeinanderfolgenden Konvergenzkreise mit der Kurve C alle zusammenfallen oder sich einem Häufungspunkt nähern. Das kann aber nur dann eintreten, wenn die Funktionswerte sich einer Stelle nähern, an der der Operator D aufhört, holomorph zu sein; denn andernfalls könnten wir nach dem (obigen) Satz eine positive Zahl T als untere Schranke der Konvergenzradien angeben, welche für alle Punkte eines gewissen Abschnitts der Kurve C gelten würde.“ (G2).*

Gröbner spricht hier das ***Kreiskettenverfahren*** der Funktionentheorie (J1) an.

*Anm.:* Hingewiesen sei auch auf die Bemerkungen in (S1) zu den Kriterien für globale Existenz und Eindeutigkeit der Lösung, zugeschnitten auf den Sonderfall der Navier-Stokes-Gleichungen. Dort heißt es im Abschnitt 8:

*„Allerdings werden in drei Raumdimensionen die garantierbaren Konvergenzradien mit wachsendem t immer kleiner bis diese irgendwann verschwinden. Ab diesem Zeitpunkt kann in diesen Funktionenräumen keine Existenz und Eindeutigkeit mehr garantiert werden.“*

Das deckt sich mit den oben angeführten Bemerkungen von Gröbner (G2).

Es soll untersucht werden, ob die Schranke *T* gegen Null gehen kann und ob die Funktion

$$T = \frac{\rho}{\left(n+1\right)N}\left(1-\frac{y}{\rho}\right)^{n-1} \tag{2.23}$$

mit

$$|t| < T = \frac{\rho}{(n+1)N}\left(1-\frac{y}{\rho}\right)^{n-1} \tag{2.24}$$

Extremwerte besitzt. Solche lägen vor, wenn die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial T}{\partial \rho} = \frac{1}{(n+1)N}\left(1-\frac{y}{\rho}\right)^{n-1}\left\{1+\frac{(n-1)y}{\rho}\left(1-\frac{y}{\rho}\right)^{-1}\right\}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{(n-1)}{(n+1)N}\left(1-\frac{y}{\rho}\right)^{n-2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial N} = -\frac{\rho(n-1)}{(n+1)N^2}\left(1-\frac{y}{\rho}\right)^{n-1} \tag{2.25}$$

von $T$ verschwinden. Daraus würden, beachtet man $n \geq 1$ , $N > 0$ , $0 < \rho < y$ , die Bedingungen

$$\begin{array}{lll} (1) & \dfrac{\partial T}{\partial \rho} = 0 & \Rightarrow -\dfrac{1}{(n+1)N}\left(1-\dfrac{y}{\rho}\right)^{n-1}\left(1-\dfrac{\rho}{y}\right)^{-1} = 0 \\ (2) & \dfrac{\partial T}{\partial y} = 0 & \Rightarrow \left(1-\dfrac{y}{\rho}\right)^{n-2} = 0 \\ (3) & \dfrac{\partial T}{\partial N} = 0 & \Rightarrow \left(1-\dfrac{y}{\rho}\right)^{n-1} = 0 \end{array} \tag{2.26}$$

folgen. Die Bedingungen (2) und (3) könnten nur erfüllt werden mit

$$y = \rho \tag{2.27}$$

Die Bedingung (1) würde dann lauten

$$-\frac{1}{N} < 0\,, \tag{2.28}$$

Nach dem von Gröbner (G2) angegebenen Abschätzungstheorem ist

$$0 < y < \rho\;, \tag{2.29}$$

so daß die Bedingungen (2) und (3) nicht erfüllbar sind.

Die Bedingung (1) könnte nur für

$$-\frac{1}{\mathrm{N}} \to 0 \Leftrightarrow \mathrm{N} \to -\infty \tag{2.30}$$

im Widerspruch zu N>0 . Also kann auch die Bedingung (1) nicht erfüllt werden.

***Ergebnis:*** *Der Konvergenzradius T hat kein Extremum, weder ein Maximum noch ein Minimum.*

***Frage:*** Kann *T* Null werden? Dem Ausdruck

$$T = \frac{\rho}{(n+1)N}\left(1-\frac{y}{\rho}\right)^{n-1} \tag{2.31}$$

entnimmt man, daß *T* verschwinden könnte in den Fällen

$$\rho = 0 \quad y = \rho \quad N \to \infty\ . \tag{2.32}$$

Das bestätigt die obigen Zitate (G2,S1) hinsichtlich der Konstruierbarkeit einer globalen Lösung durch analytische Fortsetzung lokaler Lösungen, also als Aneinanderreihung von durch Lie-Reihen dargestellten Funktionselementen. Eine solche Konstruierbarkeit scheitert jedoch, wenn der Konvergenzradius Null ist, die Holomorphie verlorengeht, d.h. die lokale Entwickelbarkeit in eine Lie-Reihe nicht mehr gegeben ist.

***Frage:*** Kann man aus den Vorzeichen der oben angegebenen partiellen Ableitungen von *T* eine Aussage über ein mögliches Verschwinden von *T* bekommen? Hilfreich kann hier sein, daß die partiellen Ableitungen die Komponenten des Gradienten $\nabla \mathrm{T}$ der Niveauflächen der Funktion $T = T(\rho, y, N)$ sind.
Dazu müsste man zeigen, daß ein anfänglich endlicher Konvergenzradius *T* im Laufe der Zeit *t* gegen Null geht. Kann man ein für das jeweilige Bewegungsproblem zutreffendes quantitatives Kriterium finden? Bekannt sind die Inhomogenität der Bewegungsgleichung und eventuell die Liereihe zu einem Anfangszeitpunkt. Gibt es für die Potenzreihen- und/oder die Taylor-Reihen-Methode entsprechende Kriterien über die Entwicklung der Konvergenzradien mit der Zeit?

Gibt es Aussagen, wann der Konvergenzradius unendlich, wann er endlich ist?

***Beispiel:*** *Es ist bekannt (S2), daß man durch eine Levi-Civita- bzw. KS-Transformation die Bewegungsgleichung des Keplerproblems auf die des harmonischen Oszillators abbilden kann. Dessen Lösung ist durch eine Potenzreihe mit unendlichem Konvergenzradius darstellbar, hingegen die des nichttransformierten Keplerproblems nur durch Reihen mit endlichem Konvergenzradius.*

Wenn durch analytische Fortsetzung keine globale Lösung konstruierbar ist, so schließt das die Existenz einer globalen Lösung nicht notwendig aus. So könnte etwa die der Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned}&\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x},t)\\ \Rightarrow \quad &\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{F}(\mathbf{x},t)}{dt} \quad \mathit{mit\ Anfangsbedingungen} \begin{cases}\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0\\ \dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\mathbf{x}}_0\end{cases}\end{aligned} \tag{2.33}$$

äquivalente Volterra-Gleichung (S2)

$$\mathbf{x}(t) = \tilde{\mathbf{x}}(t) + \int_{t_0}^{t} (t-\tau)\frac{d\mathbf{F}(\mathbf{x},\tau)}{d\tau}d\tau \quad \mathit{mit} \quad \tilde{\mathbf{x}}(t) := \mathbf{x}_0 + \dot{\mathbf{x}}_0(t-t_0) \tag{2.34}$$

eine globale Lösung besitzen. Hier sind die Sätze über Existenz und Eindeutigkeit der Theorie der Volterra-Gleichungen heranzuziehen.

### *2.1.2 Autonomer Fall*

Im autonomen Fall ist die Gleichung

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \tag{2.35}$$

zu lösen, d.h. $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ *mit den Anfangswerten* $\mathbf{x}_0 := \mathbf{x}(t_0)$ aufzusuchen.

Bei Verwendung von Potenz-/Taylorreihen als Lösungsansatz entfällt beispielsweise in der Rekursionsformel für die Reihenkoeffizienten der Term mit der partiellen Zeitableitung, d.h., es besteht die Rekursionsformel (E1)

$$\mathbf{F}_{\nu+1}(t,\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{F}_\nu(t,\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \bullet \mathbf{F}(t,\mathbf{x}) \quad \mathit{für} \quad \nu \geq 1 \tag{2.36}$$

### 2.1.3 Übertragungs- und Sensitivitätsmatrix

Wie ändert sich das Lösungsverhalten bei Änderungen der Anfangswerte bzw. von Parametern in der Hamilton-Funktion?

#### 2.1.3.1 Übertragungsmatrix

Betrachtet sei die Anfangswertaufgabe

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{F}\left(t, \mathbf{x}(t)\right) \quad mit \;\; \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{2.37}$$

Es interessiert die Änderung der Lösung bei Änderung der Anfangswerte. Als Maß für die Sensitivität des Lösungsverhaltens kann man die durch (S2)

$$\mathbf{H}(t) := \frac{\partial \mathbf{x}\left(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)\right)}{\partial \mathbf{x}_0} \tag{2.38}$$

definierte ***Übertragungsmatrix*** verwenden. Sie beschreibt die Änderung der Lösung an der Stelle *t* als Folge der Änderung der Anfangswerte $\mathbf{x}_0$

$$\mathbf{y}_0 \; \varepsilon(t) := \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0 + \varepsilon_0) - \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) \Rightarrow \varepsilon(t) = \mathbf{H}(t)\varepsilon_0 \tag{2.39}$$

Die Übertragungsmatrix genügt der Differentialgleichung

$$\frac{d\mathbf{H}(t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{H}(t) \Leftrightarrow \frac{dH_{ik}(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{t, \mathbf{x}(t)} H_{jk}(t) \quad i,k = 1(1)n \tag{2.40}$$

mit der Lösung, zu deren Berechnung man diejenige der Differentialgleichung benötigt,

$$H_{ik}(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^{\nu}}{\nu!} \left( \frac{\partial}{\partial x_k} D^{\nu} x_i \right)_{t_0, \mathbf{x}_0} \tag{2.41}$$

Sie hat i.allg. einen endlichen Konvergenzradius, so daß man zur Überbrückung eines bestimmten Intervalls analytisch fortsetzen muß, wobei mit einem kleiner werdenden Konvergenzradius zu rechnen ist.

Aus den ***lokalen Übertragungsmatrizen*** (S2)

$$\mathbf{C}\left(x_j, x_{j-1}\right) = \left( \frac{\partial y_i\left(x_j\right)}{\partial y_k\left(x_{j-1}\right)} \right) \qquad in \quad \left(x_{j-1}, x_j\right) \tag{2.42}$$

gewinnt man die ***totale Übertragungsmatrix*** für das Intervall

$$\left[x_0, x_N\right] = \left[x_0, x_1\right] \cup \left[x_1, x_2\right] \cup .... \cup \left[x_{N-1}, x_N\right] \tag{2.43}$$

nach der Kettenregel für Funktionen mehrerer Veränderlicher

$$\mathbf{H}\left(x_N\right) = \mathbf{C}\left(x_N, x_{N-1}\right) .... \mathbf{C}\left(x_1, x_0\right) \ . \tag{2.43}$$

Anm.: Die Übertragungsmatrix $\mathbf{H}\left(x\right)$ ist eine ***Jacobi-Matrix,*** für die gilt

$$\mathbf{H}\left(x_0\right) = \mathbf{C}\left(x, x\right) = Einheitsmatrix$$

$$\mathbf{C}\left(x, x'\right) = \mathbf{C}\left(x', x\right)^{-1} \tag{2.44}$$

### *2.1.3.2 Sensitivitätsmatrix*

Die Lösung der Differentialgleichung wird in der Regel noch von Parametern **P,** herrührend aus der Inhomogenität **F** der Differentialgleichung, abhängen. Zur Beschreibung der Empfindlichkeit der Lösung bei Änderungen dieser Parameter kann man analog zur Übertragungsmatrix die durch (S2)

$$\mathbf{S}(t) := \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{P}} \ \Leftrightarrow \ S_{ik}(t) = \frac{\partial y_i}{\partial P_k} \tag{2.45}$$

erklärte ***Sensitivitätsmatrix S*** heranziehen. Sie genügt der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}\mathbf{S}(t) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{S}(t) \ \Leftrightarrow \ \frac{dS_{ik}(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \right)_{t,\mathbf{x}(t)} S_{ij}(t) \tag{2.46}$$

mit der Lösung, zu deren Berechnung wiederum die Lösung der Bewegungsgleichung benötigt wird,

$$S_{ik}(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\left(t - t_0\right)^{\nu}}{\nu!} \left( \frac{\partial}{\partial P_k} D^{\nu} x_i \right)_{t_0, \mathbf{x}_0} \ . \tag{2.47}$$

Anmerkung: Zählt man die Anfangswerte zu den Parametern, so ist die Übertragungsmatrix eine Untermatrix der Sensitivitätsmatrix.

Mit Hilfe dieser Matrizen läßt sich der Lösungsverlauf bei gleichzeitiger Abänderung der Anfangswerte und der Parameterwerte darstellen durch

$$\begin{gathered}\Delta\mathbf{x} := \left(t, \mathbf{x}_0 + \varepsilon_0, \mathbf{P} + \Delta\mathbf{P}\right) - \mathbf{x}\left(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{P}\right) \\ \mathbf{y}\left(t, \mathbf{y}_0 + \varepsilon_0, \mathbf{P} + \Delta\mathbf{P}\right) \approx \mathbf{y}\left(t, \mathbf{y}_0, \mathbf{P}\right) + \mathbf{H}(t)\varepsilon_0 + \mathbf{S}(t)\Delta\mathbf{P}\end{gathered} \tag{2.48}$$

Damit kann beispielweise die ***kinematische Stabilität*** einer Lösung untersucht werden. Sie wird ***stabil*** sein, wenn gilt (S2)

$$\left.\begin{array}{l}\left|\Delta\mathbf{y}(t_0)\right| \le \eta(\varepsilon) \\ \left|\Delta\mathbf{y}(t)\right| \le \varepsilon\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}\left|\mathbf{H}(t_0)\varepsilon_0 + \mathbf{S}(t_0)\Delta\mathbf{P}\right| \le \eta(\varepsilon) \\ \left|\mathbf{H}(t)\varepsilon_0 + \mathbf{S}(t)\Delta\mathbf{P}\right| \le \varepsilon\end{array}\right\} \; \mathit{für} \begin{cases} t = t_0 \\ t \ge t_0 \end{cases} \tag{2.49}$$

Diese Bedingungen werden bei noch so kleinen Abänderungen der Anfangs- und/oder Parameterwerte nicht erfüllbar sein, wenn die Übertragungs- und/oder Sensitivitätsmatrix monotone Verlaufsanteile aufweisen.

Fragen der Stabilität können im Falle konservativer kanonischer Systeme auch mit dem ***Satz von Liouville*** diskutiert werden (S2).

## *2.2 Lösung selbstadjungierter Randwertaufgaben*

### *2.2.1 Lösungsdarstellung durch Eigenfunktionen*

Die Lösung einer selbstadjungierten Randwertaufgabe zu der Differentialgleichung

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \tag{2.33}$$

kann als Entwicklung nach dem orthonormierten System der Eigenfunktionen des Kerns der zugehörigen Fredholmschen Integralgleichung dargestellt werden.

Im Falle von Sturmschen Randbedingungen vom Typ I lautet die Entwicklung (S2)

$$\mathbf{x}(\xi;t_n)=\bar{\mathbf{x}}(\xi;t_n)+\sum_{\sigma=1}^{\infty}\mathbf{x}_\sigma(\xi)\,\phi_\sigma^I(t_n)$$

$$\textit{mit den Eigenfunktionen } \phi_\sigma^I(t_n):=\sqrt{2}\sin\left(\sqrt{\lambda_\sigma}\,t_n\right) \textit{ zu den Eigenwerten } \lambda_\sigma=\sigma^2\pi^2$$

$$\textit{und } \bar{\mathbf{x}}(\xi;t_n):=\mathbf{x}_A+(\mathbf{x}_B-\mathbf{x}_A)t_n \;\; \textit{Randwerte } \mathbf{x}_A:=\mathbf{x}(\xi;t_n=0),\mathbf{x}_B:=\mathbf{x}(\xi;t_n=1) \tag{2.50}$$

Die Entwicklungskoeffizienten sind dabei aus dem unendlichen System von Bedingungsgleichungen (S 2)

$$\mathbf{x}_\sigma=\frac{T}{\sqrt{\lambda_{S\sigma}}}\int_0^1\Phi_\sigma^{II}(\tau_n')\,\mathbf{F}\left(\mathbf{x}(\tau_n'),\tau_n'\right)d\tau_n' \quad \sigma=1(1)\infty$$

$$\textit{worin } \Phi_\sigma^{II}(\tau_n):=\sqrt{2}\cos\sigma\pi\tau_N \tag{2.51}$$

zu bestimmen. Die Reihe ist im Intervall $T:=t_B-t_A$ gleichmäßig konvergent (G2). Die Zeitvariable ist normiert enzsprechend

$$t_n:=\frac{t-t_A}{T}\Rightarrow 0<t_n<1\Leftrightarrow t_A<T<t_B\;. \tag{2.52}$$

Die Auflösung der Bedingungsgleichungen nach den Entwicklungskoeffizienten kann beispielsweise iterativ erfolgen. Wenn diese Gleichungen die Gestalt

$$\mathbf{x}_\sigma=\mathbf{y}_\sigma+\mathbf{P}_\sigma(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,...)$$

$$\textit{mit } \mathbf{y}_\sigma \text{ Konstanten}$$

$$\mathbf{P}_\sigma \textit{ Potenzreihen in } \mathbf{x}_\mu \textit{ ohne Absolutglieder und ohne lineare Glieder} \tag{2.53}$$

aufweisen, dann kann die Lösung des Systems der Bedingungsgleichungen nach einem ***Satz von Helge von Koch,*** der mit einem Satz von E.Schmidt im wesentlichen übereinstimmt (H1), durch absolut konvergente Potenzreihen (H2,K1)

$$y^{(\nu)} + \sum_{\sigma} \alpha_{\sigma}^{(\nu)} y_{\sigma} + \sum_{\sigma,\mu} \alpha_{\sigma\mu}^{(\nu)} y_{\sigma} y_{\mu} + \sum_{\sigma,\mu,\tau} \alpha_{\sigma\mu\tau}^{(\nu)} y_{\sigma} y_{\mu} y_{\tau} + \ldots = \sum_{p,q} c_{pq}^{(\sigma)} \{p\}\{q\} + \sum_{p,q,r} c_{pqr}^{(\sigma)} \{p\}\{q\}\{r\} + \ldots$$

$$mit \quad \{s\} := y^{(s)} + \sum_{\sigma} \alpha_{\sigma}^{(s)} y_{\sigma} + \sum_{\sigma,\mu} \alpha_{\sigma\mu}^{(s)} y_{\sigma} y_{\mu} + \ldots \tag{2.54}$$

dargestellt werden. Voraussetzung ist, daß die Koeffizienten der Potenzreihe $\mathbf{P}_{\sigma}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots)$ absolut unterhalb der endlichen Grenze $M_{\sigma}$ bleiben und ferner die Summe

$$\sum_{\sigma=1}^{\infty} M_{\sigma}$$

endlich ist.

Im Hinblick auf die Anwendung dieses Satzes ist wichtig, daß man die Bedinungsgleichungen in der angenommenen Gestalt aufschreiben und die Entwicklungskoeffizienten der Lösungsreihe berechnen kann.

### 2.2.2 Auflösung der Bedingungsgleichungen

Die vorgenannten Potenzreihen haben die Gestalt

$$\mathbf{P}_{\sigma}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots) = \sum_{p,q} c_{pq}^{(\sigma)} x_p x_q + \sum_{p,q,r} c_{pqr}^{(\sigma)} x_p x_q x_r + \ldots$$

$$p, q, r = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.55}$$

Nach dem ***Satz von Helge von Koch*** kann man die Lösungen der Bedingungs-gleichungen darstellen in der Form

$$\mathbf{x}_{\nu} = \amalg_{\nu}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots) = y^{(\nu)} + \sum_{\sigma} \alpha_{\sigma}^{(\nu)} y_{\sigma} + \sum_{\sigma,\mu} \alpha_{\sigma\mu}^{(\nu)} y_{\sigma} y_{\mu} + \sum_{\sigma,\mu,\tau} \alpha_{\sigma\mu\tau}^{(\nu)} y_{\sigma} y_{\mu} y_{\tau} + \ldots \tag{2.56}$$

Darin sind zunächst unbekannt die Größen

$$y^{(\nu)}, \alpha_{\sigma}^{(\nu)}, \alpha_{\sigma\mu}^{(\nu)}, \alpha_{\sigma\mu\tau}^{(\nu)}, \ldots \; , \tag{2.57}$$

die aus den bekannten Größen

$$c_{pq}^{(\nu)}, c_{pqr}^{(\nu)}, \ldots \tag{2.58}$$

berechnet werden können. Dazu trägt man in

$$\mathbf{x}_\nu = \mathbf{y}_\nu + \mathbf{P}_\nu\left(y_1, y_2, \ldots\right) \tag{2.59}$$

die Ausdrücke für $\mathbf{x}_\nu$ und $\prod_\nu$ gemäß (2.55) und (2.56) ein

$$y^{(\nu)} + \sum_\sigma \alpha_\sigma^{(\nu)} y_\sigma + \sum_{\sigma,\mu} \alpha_{\sigma\mu}^{(\nu)} y_\sigma y_\mu + \sum_{\sigma,\mu,\tau} \alpha_{\sigma\mu\tau}^{(\nu)} y_\sigma y_\mu y_\tau + \ldots = \sum_{p,q} c_{pq}^{(\sigma)} \{p\}\{q\} + \sum_{p,q,r} c_{pqr}^{(\sigma)} \{p\}\{q\}\{r\} + \ldots \tag{2.60}$$

Diese Gleichungen sind für alle $\infty - \mathit{Tupel}\ y_1, y_2, \ldots$ identisch zu erfüllen:

a) Der Vergleich der von den $y_\sigma$ unabhängigen Terme auf den linken und rechten Seiten der Gleichungen ergibt

$$y^{(\nu)} = \sum_{p,q} c_{pq}^{(\sigma)} \{p\}\{q\} + \sum_{p,q,r} c_{pqr}^{(\sigma)} \{p\}\{q\}\{r\} + \ldots \tag{2.61}$$

Die Konstanten in der Lösungsreihe (2.56) sind demnach aus dem homogenen System

$$\mathbf{y}^{(\nu)} = \mathbf{P}_\nu\left(y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots\right) \tag{2.62}$$

zu bestimmen. Dieses hat jedenfalls die triviale Lösung

$$\mathbf{y}^{(\nu)} = \mathbf{0} \qquad \nu = 1(1)\infty \tag{2.63}$$

Unterstellt man diese triviale Lösung, so liefert der Vergleich der in den $y_\sigma$ linearen Terme

$$
\begin{aligned}
\alpha_\sigma^{(\nu)} = \delta_{\nu\sigma} &+ \sum_{pq} c_{pq}^{(\nu)} y^{(q)} + \sum_{pqr} c_{pqr}^{(\nu)} y^{(q)} y^{(r)} \alpha_\sigma^{(p)} \\
&+ \sum_{pq} c_{pq}^{(\nu)} y^{(p)} + \sum_{pqr} c_{pqr}^{(\nu)} y^{(q)} y^{(r)} \alpha_\sigma^{(q)} \\
&\sum_{pqr} c_{pqr}^{(\nu)} y^{(p)} y^{(q)} \alpha_\sigma^{(r)} \\
&+ \ldots
\end{aligned}
\tag{2.64}
$$

Es verbleibt im Falle der trivialen Lösung

$$
\alpha_\sigma^{(\nu)} = \delta_{\nu\sigma} \qquad \nu, \sigma = 1(1)\infty \tag{2.65}
$$

Damit lautet die Lösung bis zu linearen Termen

$$
x_\nu = \sum_\sigma \delta_{\nu\sigma} y_\sigma = y_\nu \tag{2.66}
$$

b) Für die in den $y_\sigma$ bilinearen Terme ergibt ein Koeffizientenvergleich, beachtet man (2.63) und (2.65)

$$
\alpha_{\sigma\mu}^{[\nu]} = \sum_{p,q} \alpha_\sigma^{[p]} \alpha_\mu^{[q]} c_{pq}^{(\nu)} = \sum_{p,q} \delta_{p\sigma} \delta_{q\mu} c_{pq}^{(\nu)} = \delta_{\sigma\sigma} \delta_{\mu\mu} c_{pq}^{(\nu)} = c_{pq}^{(\nu)} \tag{2.67}
$$

so daß bis zu bilinearen Termen folgt

$$
x_\nu = y_\nu + \sum_{\sigma,\mu} c_{\sigma\mu}^{(\nu)} y_\sigma y_\mu \tag{2.68}
$$

Hat die Gleichung eine nichttriviale Lösung $y^{(\nu)} \neq 0$, so ist diese in (2.64) einzutragen, und durch Auflösung des nunmehr inhomogenen Gleichungssystems sind die Koeffizienten $\alpha_\sigma^{(\nu)}$ zu bestimmen. Bis zu den in den $y_\sigma$ linearen Termen lautet jetzt die Lösung

$$
x_\nu = y^{(\nu)} + \sum_\sigma \alpha_\sigma^{(\nu)} y_\sigma + \ldots \tag{2.69}
$$

Die Bestimmung der Koeffizienten der in den $y_\sigma$ bilinearen Terme erfolgt dann aus dem inhomogenen linearen Gleichungssystem

$$\alpha^{(\nu)}_{\sigma\mu} = \sum_{p,q} c^{(\nu)}_{pq} \left[ y^{(p)}\alpha^{(q)}_{\sigma\mu} + y^{(p)}\alpha^{(p)}_{\sigma\mu} + \alpha^{(p)}_{\sigma}\alpha^{(q)}_{\mu} \right]$$
$$+ \sum_{p.q.r} c^{(\nu)}_{pqr} \begin{bmatrix} \alpha^{(p)}_{\sigma\mu} y^{(p)} + y^{(p)}\alpha^{(q)}_{\sigma\mu} y^{(r)} + y^{y(p)} y^{(r)}\alpha^{(r)}_{\sigma\mu} \\ +\alpha^{(p)}_{\sigma}\alpha^{(q)}_{\mu} y^{(r)} + y^{(p)}\alpha^{(q)}_{\sigma}\alpha^{(r)}_{\mu} + \alpha^{(p)}_{\sigma} y^{(q)}\alpha^{(r)}_{\mu} \end{bmatrix} \tag{2.70}$$

Ebenso können die weiteren Koeffizienten

$$\alpha^{(\nu)}_{\sigma\mu\tau}, \alpha^{(\nu)}_{\sigma\mu\tau\rho}, \ldots \tag{2.71}$$

durch Auflösung inhomogener linearer Gleichungssysteme bestimmt werden.

***Ergebnis:*** Während die Lösung einer Anfangswertaufgabe zu den Navier-Stokes-Gleichungen mittels Lie-Reihen wohl keine eindeutig bestimmte globale glatte Lösung zu garantieren scheint, ist das im Falle der Lösung einer Randwertaufgabe mittels der Methode der unendlich vielen Variablen nach dem Satz von Helge von Koch durchaus zu erwarten, könnte die Milleniumsaufgabe (S1) also eine Lösung besitzen. Das würde zunächst für periodische Lösungen zutreffen (S3). Im Falle der hier behandelten Zielbewegung müsste der endliche Zeitraum auf einen unendlichen ausgedehnt werden, was zu einer singulären Integralgleichung führen würde (S2). Das soll hier nicht weiter verfolgt werden.

## *2.3 Winkelgeschwindigkeitsfeld*

Aus dem Geschwindigkeitsfeld gewinnt man das über dem Kontinuum bestehende Winkelgeschwindigkeitsfeld (G,1,L1,S2)

$$\omega(t) := \frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{v}(\xi, t) \tag{2.72}$$

Damit kann aus der Navier-Stokes-Gleichung der Druck eliminiert werden. Bildet man nämlich auf beiden Seiten der lokalen Impulsbilanz

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} + \frac{1}{\rho}\nabla_{\mathbf{r}} \bullet \mathbf{T} \rightarrow \rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho\mathbf{f} - \nabla_{\mathbf{r}} p + \eta\Delta\mathbf{v} \tag{2.73}$$

die Rotation (G1,L1) und beachtet

$$\Delta\mathbf{v} = \nabla(\nabla\bullet\mathbf{v}) - \nabla\times(\nabla\times\mathbf{v}) \;, \tag{2.74}$$

dann folgt

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbf{v}) - \nabla\times\{\mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{v})\} = -\frac{\eta}{\rho}\nabla\times\{\nabla\times(\nabla\times\mathbf{v})\} \tag{2.75}$$

Geht man darin von der lokalen zur substantiellen Zeitableitung vermittels (S2)

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\bullet\nabla \tag{2.76}$$

über, so erhält man eine Bestimmungsgleichung für die lokale Winkelgeschwindigkeit (2.72).

In dieser lokalen Drehimpulsbilanz ist der Druck $p$ eliminiert!
Damit stehen für die Untersuchung der Bewegung eines räumlich begrenzten nichtpolaren inkompressiblen einkomponentigen Kontinuums die lokalen Bilanzgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= -\nabla_{\mathbf{r}}\bullet\mathbf{v} \\ \frac{d(\nabla\times\mathbf{v})}{dt} &= \left[\mathbf{v}\bullet\nabla(\nabla\times\mathbf{v}) + \nabla\times(\mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{v})) - \frac{\eta}{\rho}\nabla\times(\nabla\times(\nabla\times\mathbf{v}))\right] \end{aligned} \tag{2.77}$$

zur Verfügung. Angenommen ist, daß die Zähigkeit $\eta$ sich im Kontinuum nicht wesentlich ändert.

Aus der Bewegungsgleichung folgt wegen
$rot\ grad\,U = \mathbf{0}$

$$\begin{aligned} &\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho\mathbf{f} - \nabla_{\mathbf{r}}p + \eta\Delta\mathbf{v} \to \rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho\nabla_{\mathbf{r}}U - \nabla_{\mathbf{r}}p + \eta\Delta\mathbf{v} \\ &\xrightarrow{\text{Rotation bilden}} \rho\frac{d\nabla\times\mathbf{v}}{dt} = \rho\nabla\times\nabla U - \nabla\times\nabla_{\mathbf{r}}p + \eta\nabla\times\Delta\mathbf{v} \\ &\Rightarrow \frac{d\nabla\times\mathbf{v}}{dt} = \frac{\eta\nabla\times\Delta\mathbf{v}}{\rho} \end{aligned} \tag{2.78}$$

# 3 Zusammenfassung und Ausblick

Die mechanisch-thermodynamischen Bilanzgleichungen eines räumlich begrenzten, einfach zusammenhängenden nichtpolaren und einkomponentigen Kontinuums können durch Einführung einer Hamilton-Funktion in ein System kanonischer Bewegungsgleichungen umgeschrieben werden. Zu ihrer Lösung lassen sich bei Anfangswertdeterminierung Lie-Reihen bzw. bei störungstheoretischer Behandlung Lie-Transformationen verwenden. Bei Randwertdeterminierung kann die zugeordnete Fredholmsche Integralgleichung nach der Methode der unendlich vielen Variablen gelöst werden, also unter Verwendung von Entwicklungen nach den orthonormierten Eigenfunktionen des entsprechenden Integralgleichungskerns (S2).

Gemessen an der vom Clay Mathematics Institute gestellten Milleniumsaufgabe, die Existenz und Eindeutigkeit globaler glatter Lösungen der dreidimensionalen Navier-Stokes-Gleichungen (S1) zu zeigen, läßt sich aus der vorliegenden Studie folgendes Ergebnis festhalten:

1. die Verwendung von Liereihen zur Lösungsdarstellung bei Anfangswertdeterminierung führt zunächst nur zu lokalen/regionalen Lösungen. Eine darauf aufbauende analytische Fortsetzung wird in der Regel an der zunehmenden Verkleinerung des Konvergenzradius scheitern.
   Das bestätigen die aus der Theorie der Differentialgleichungen und Funktionentheorie bekannten Existenz- und Eindeutigkeitssätze (A1,E2, G1) hinsichtlich globaler Lösungen.
2. Wenn sich eine Transformation der Variablen finden ließe, so daß die transformierten Navier-Stokes-Gleichungen durch eine Lie-Reihe mit unendlich großem Konvergenzintervall gelöst würde, dann wäre die Milleniumsaufgabe lösbar.
3. Bei Randwertdeterminierung läßt sich eine Lösung in einem endlichen Zeitintervall konstruieren. Wenn speziell eine periodische Lösung bestimmt werden kann, dann liegt damit eine globale Lösung vor. Bei anderen Randwertaufgaben muß das Zeitintervall unendlich ausgedehnt werden und damit eine singuläre Integralgleichung zugrunde gelegt werden (S2).

Das angenommene (autonome) Modell läßt sich in verschiedener Hinsicht erweitern:

1. Mehrkomponentige Kontinua (E1,S2)
2. Polare Kontinua, speziell Cosserat-Kontinua (B1;E1,S2)
3. Unstetigkeitsflächen im Kontinuum, Transporttheorem (B1,S2)

Die Hamiltonisierung ist auch in diesen Fällen möglich. Entsprechend können die entstehenden kanonischen Bewegungsgleichungen mit Hilfe von Lie-Reihen (G2) bei Anfangswertaufgaben und mittels Entwicklungen nach orthonormierten Eigenfunktionssystemen der zugeordneten Integralgleichungskerne bei Randwertdeterminierung gelöst werden (S2).
Weiter ist der nichtautonome Fall zu betrachten, wenn die rechten Seiten der Bilanzgleichungen explizit zeitabhängig sind

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x},t) \rightarrow H_{ext} = H_{ext}(\mathbf{x},\mathbf{y},t) \ . \tag{3.1}$$

Das erfordert den Übergang  in einen erweiterteten Phasenraum, üblicherweise durch Hinzunahme eines weiteren Paares kanonisch konjugierter Variablen (S2).
Aussagen über Existenz und Eindeutigkeit der Lösung können wie im hier betrachteten vereinfachten autonomen Modell getroffen/versucht werden.
Eine noch weitergehende Verallgemeinerung sollte auch elektromagnetische Felder einbeziehen. Das würde dann die Magnetohydrodynamik einschließen (E1).

Zur numerischen Lösung der  überabzählbaren kanonischen Gleichungen als Äquivalent  der partiellen Navier-Stokes-Differentialgleichungena kann man aauf symplektische Integratoren zurückgreifen (E4, S2), die auf die Hamiltonsche Struktur abgestimmt sind und daher einige Vorzüge hinsichtlich der Verfahrensfehler aufweisen. Aber auch die Verwendung symplektischer Abbildungen sollte aus dem gleichen Grunde voreilhaft sein. Die sicherlich wegen der überabzählbaren vielen gewöhnlichen Differentialgleichungen erforderliche Diskretisierung einer Referenzkonfiguration legt eine Parallelisierung der numerischen Lösung nahe.
Wenn das gestellte Bewegungsproblem als Störungsproblem fomulierbar ist. dann kommen  Verfahren der kanonischen Störungsrechnung basierend auf Lie-Transformationen, speziell quadratisch konvergente, in Betracht (S2).

# 4 Literaturhinweise


***(A1) Aulbach, B. (1997): Gewöhnliche Differentialgleichungen.*** Spektrum Akademische Verlag, Heidelberg

***(B1) Becker,E., Bürger, W. (1975): Kontinuumsmechanik.*** Teubner Verlag Stuttgart

***(E1) Eringen, A.C. (1980): Mechanics of Continua.*** R.E. Krieger Publ. Comp. Huntington, New York

***(E2) Erwe, F. (1964): Gewöhnliche Differentialgleichungen.***Bibliographisches Institut Mannheim

***(E3) Erwe, F. (1962):Differential- und Integralrechnung I+II.*** Bibliographisches Institut Mannheim

***(E4) Ettl, M. (2012): Hochgenaue numerische Lösung von Bewegungsgleichungen mit frei wählbarer Stellengenauigkeit.*** Dissertation ,Technische Universität München

***(G1) Greiner,W., Stock, H. (1991): Hydrodynamik – Theoretische Physik Bd. 2A.*** Verlag Harri Deutsch Frankfurt (4.Auflage*)*

***(G2) Gröbner, W. (1967): Die Lie-Reihen und ihre Anwendungen.*** VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin (2.Auflage)

+***Gröbner, W., Lesky, P. (1964): Mathematische Methoden der Physik I.*** *HTB 89,Bibliographisches Institut ,Mannheim*

***(H1) Hammerstein, A. (1930): Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen.*** Acta mathematica 54

***(H2) Hilbert, D. (1908): Wesen und Ziele einer Analyse der unendlich vielen Variablen.*** Rend. Circ. Matem, Palermo XXVII

***(H3) Hilbert, D. (1912): Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen.*** Teubner Verlag Leipzig und Berlin

***(J1) Jänich, K. (1999): Funktionentheorie - Eine Einführung.*** Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York (5.Auflage)

***(K1) Koch, H. v. (1899): Sur le functions implicites definies par une infinite d'equations simultanee.*** Bulletin de la Societe Mathematique de France,Bd. XXVII

***(L1) Landau, L.D. , Lifschitz, E.M. (1966): Hydrodynamik , Lehrbuch der Theoretischen Physik. Band VI.*** Akademie-Verlag Berlin

***(S1) Schneider, G. (2008): Ein Milleniumsproblem: Die globale Existenz und Eindeutigkeit glatter Lösungen der dreidimensionalen Navier-Stokes-Gleichungen.*** Mathematik-Online:Beiräge zu berühmten, gelösten und ungelösten Problemen, Nummer 2

***(S2) Schneider, M. (1992-1999): Himmelsmechanik I-IV.*** Bibliographisches Institut Mannheim und Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg

***(S3) Schneider, M. (2011): Entwurf einer Resonanztheorie basierend auf Integralgleichungen.*** Schriftenreihe IAPG und FESG, TU München Heft Nr. 3

# 5 Danksagung

Für die Aufnahme der vorliegenden Studie in die Berichtsreihe des *Center of Geodetic Earth System Research (CGE)* möchte ich dessen Sprecher, Herrn Univ.-Prof. Dr. Roland Pail herzlich danken. Für die Durchsicht des Manuskriptes danke ich Herrn Univ.-Prof. Dr. Reiner Rummel und Herrn Dr.-Ing. Martin Horwath.

# Anhang A

## *Taylorreihe des Gravitationsfeldes*

**Ziel:** Darstellung des Gravitationsfeldes in der Umgebung eines Ortes $\mathbf{r}_0 := (x_0, y_0, z_0)^T$ durch seine Taylorreihe um diese Stelle

$$f(\mathbf{r},t) = \sum_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3=0}^{\infty} \frac{1}{\sigma_1!\sigma_2!\sigma_3!} \left( \frac{\partial^{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3} f(\mathbf{r},t)}{\partial x^{\sigma_1} \partial y^{\sigma_2} \partial z^{\sigma_3}} \right) \Bigg|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_1} (x(t)-x_0)^{\sigma_1} (y(t)-y_0)^{\sigma_2} (z(t)-z_0)^{\sigma_3} \tag{A.1}$$

Die Funktion $f(\mathbf{r},t)$ kann beispielsweise bedeuten

$$f(\mathbf{r},t) \quad \text{das Gravitationspotential } U_G(\mathbf{r},t) = GM_\otimes V(\mathbf{r},t) \tag{A.2}$$

oder

$$f(\mathbf{r},t) = \nabla_\mathbf{r} U_G(\mathbf{r},t) \quad \text{die Gravitationsfeldstärke} \tag{A.3}$$

Die in der Taylorreihe benötigten partiellen Ableitungen etwa des

**Gravitationspotentials**

$$U_G(\mathbf{r}) =: GM_\otimes V(\mathbf{r})$$
$$\text{mit dem Aufpunkt } \mathbf{r} = (x,y,z)^T \tag{A.4}$$

sind nach Cunningham(S2) darstellbar entsprechend

$$\frac{\partial^\Sigma V(\mathbf{r})}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} = \Re e \left( \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{l} a_\otimes^l (C_{lm} - jS_{lm}) \frac{\partial^\Sigma V_{lm}(\mathbf{r})}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} \right) \tag{A.5}$$

mit $(j = \sqrt{-1})$ und

$$\frac{\partial^\Sigma V_{lm}(\mathbf{r})}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} = j^\beta \sum_{i=1}^{\alpha+\beta} \frac{(-1)^{\alpha+\gamma-i}}{2^{\alpha+\beta}} \cdot \frac{(l-m+\gamma+2i)!}{(l-m)!} \cdot C_{\alpha\beta i} V_{l+\Sigma, m+\alpha+\beta-2i} \tag{A.6}$$

sowie

$$C_{\alpha\beta i} := \sum_k (-1)^k \binom{\alpha}{i-k}\binom{\beta}{k} \quad . \qquad \text{(A.7)}$$
$$mit \quad \max(0; i-\alpha) \le k \le \min(\beta; i)$$

Die darin benötigten Funktionen $V(\mathbf{r})$ *und* $V_{lm}(\mathbf{r})$ sind nach Cunningham erklärt durch

$$V(\mathbf{r}) := \Re e\left( \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{l} a_{\otimes}^{l} (C_{lm} - jS_{lm}) V_{lm} \right)$$
$$mit \quad j := \sqrt{-1} \qquad \text{(A.8)}$$

$$V_{lm} := \frac{r^{l-m}(x+jy)^m}{r^{2l+1}} Z_{lm} \quad . \qquad \text{(A.9)}$$

mit $$Z_{lm}(z,\sigma^2) := \frac{(l+m)!}{2^l\, l!} \sum_{k=0}^{I\left(\frac{l-m}{2}\right)} \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \binom{m+2k}{k}\binom{l}{m+2k} z^{l-m-2k} \sigma^{2k}$$

$$\sigma^2 := x^2 + y^2 \quad .$$
$$I\left(\frac{l-m}{2}\right) \quad \text{ganzzahliger Anteil von} \quad \frac{l-m}{2} \qquad \text{(A.10)}$$

Führt man die Abkürzungen

$$A_{lm,i}^{\alpha\beta\gamma} := \frac{(-1)^{\alpha+\gamma-i}}{2^{\alpha+\beta}} \cdot \frac{(l-m+\gamma+2i)!}{(l-m)!}$$
$$P_{lm,\Sigma}^{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}) := \frac{\partial^{\Sigma} V_{lm}(\mathbf{r})}{\partial x^{\alpha}\, \partial y^{\beta}\, \partial z^{\gamma}} = j^{\beta} \sum_{i=1}^{\alpha+\beta} A_{lm,i}^{\alpha\beta\gamma} C_{\alpha\beta i} V_{l+\Sigma, m+\alpha+\beta-2i}$$
$$mit \qquad \Sigma := \alpha+\beta+\gamma = 0,1,2,\ldots\infty$$
$$\alpha,\beta,\gamma = 0,1,\ldots\infty \qquad \text{(A.11)}$$

ein, so erhält man für die partiellen Ableitungen des Gravitationspotentials

$$\frac{\partial^{\Sigma} U_G(\mathbf{r})}{\partial x^{\alpha}\, \partial y^{\beta}\, \partial z^{\gamma}} =: \frac{GM_{\otimes}\, \partial^{\Sigma} V(\mathbf{r})}{\partial x^{\alpha}\, \partial y^{\beta}\, \partial z^{\gamma}} = GM_{\otimes} \Re e\left( \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{l} a_{\otimes}^{l} (C_{lm} - jS_{lm}) P_{lm,\Sigma}^{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}) \right) . \qquad \text{(A.12)}$$

**Ergebnis:** In der Umgebung des Aufpunktes $\mathbf{r_0}$, definiert durch das Konvergenzgebiet, ist das Gravitationsfeld beispielsweise für Zwecke der numerischen

Integration durch seine Taylorreihe berechenbar. Es braucht nur im Entwicklungspunkt nach der herkömmlichen Art und Weise berechnet zu werden. Es ist dann über die Taylorreihe im ganzen Konvergenzgebiet bekannt, sofern man im Aufpunkt auch alle partiellen Ableitungen berechnet.
Insgesamt sollte das erheblich schneller möglich sein als die Neuberechnung des Feldes für jeden Stützpunkt der numerischen Integration im Konvergenzgebiet.

**Analytische Fortsetzung:** Sei $\mathbf{r_1}$ ein Aufpunkt im Konvergenzgebiet um den Aufpunkt $\mathbf{r_0}$. Er sei Entwicklungspunkt einer Taylorreihe

$$f(\mathbf{r}) = \sum_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3=0}^{\infty} \frac{1}{\sigma_1!\sigma_2!\sigma_3!} \left( \frac{\partial^{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3} f(\mathbf{r})}{\partial x^{\sigma_1}\, \partial y^{\sigma_2}\, \partial^{\sigma_3} z} \right)_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_1} (x-x_1)^{\sigma_1} (y-y_1)^{\sigma_2} (z-z_1)^{\sigma_3} \tag{A.13}$$

Wie lassen sich die Taylorreihenkoeffizienten dieser Reihe ausdrücken durch diejenigen der Entwicklung um $\mathbf{r_0}$? Aufgesucht werden soll die Darstellung der

$$\left( \frac{\partial^{\nu_1+\nu_2+\nu_3} f(\mathbf{r})}{\partial x^{\nu_1}\, \partial y^{\nu_2}\, \partial z^{\nu_3}} \right)_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_1} \text{ durch } \left( \frac{\partial^{\nu_1+\nu_2+\nu_3} f(\mathbf{r})}{\partial x^{\nu_1}\, \partial y^{\nu_2}\, \partial z^{\nu_3}} \right)_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0}. \tag{A.14}$$

Dazu werden die partiellen Ableitungen von

$$f(\mathbf{r}) = \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3=0}^{\infty} \frac{1}{\nu_1!\nu_2!\nu_3!} \left( \frac{\partial^{\nu_1+\nu_2+\nu_3} f(\mathbf{r})}{\partial x^{\nu_1}\, \partial y^{\nu_2}\, \partial^{\nu_3} z} \right)_{\mathbf{r}=\mathbf{r_0}} (x-x_0)^{\nu_1} (y-y_0)^{\nu_2} (z-z_0)^{\nu_3} \tag{A.15}$$

an der Stelle $\mathbf{r_1} = (x_1, y_1, z_1)$ benötigt, d.h.

$$\left( \frac{\partial^{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}}{\partial x^{\sigma_1}\, \partial y^{\sigma_2}\, \partial^{\sigma_3} z} \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3=0}^{\infty} \frac{1}{\nu_1!\nu_2!\nu_3!} \left( \frac{\partial^{\nu_1+\nu_2+\nu_3} f(\mathbf{r})}{\partial x^{\nu_1}\, \partial y^{\nu_2}\, \partial z^{\nu_3}} \right)_{\mathbf{r}=\mathbf{r_0}} (x-x_0)^{\nu_1} (y-y_0)^{\nu_2} (z-z_0)^{\nu_3} \right)_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_1} \tag{A.16}$$

bzw. da die Ableitungen auf $x, y, z$ wirken

$$= \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3=0}^{\infty} \frac{1}{\nu_1!\nu_2!,\nu_3!} \left( \frac{\partial^{\nu_1+\nu_2+\nu_3} f(\mathbf{r})}{\partial x^{\nu_1}\, \partial y^{\nu_2}\, \partial z^{\nu_3}} \right)_{\mathbf{r}=\mathbf{r_0}} \frac{\partial^{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}}{\partial x^{\sigma_1}\, \partial y^{\sigma_2}\, \partial^{\sigma_3} z} \left\{ (x-x_0)^{\nu_1} (y-y_0)^{\nu_2} (z-z_0)^{\nu_3} \right\}_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_1} \tag{A.17}$$

Wegen

$$\frac{\partial^{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}}{\partial x^{\sigma_1}\,\partial y^{\sigma_2}\,\partial^{z\sigma_3}}\left\{\left(x-x_0\right)^{\nu_1}\left(y-y_0\right)^{\nu_2}\left(z-z_0\right)^{\nu_3}\right\}_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_1}$$

$$=\left\{\begin{matrix}\left[\nu_1+\sigma_1\right]\left(x-x_1\right)^{\nu_1-\sigma_1}\left(y_1-y_0\right)^{\nu_2}\left(z_1-z_0\right)^{\nu_3}\\ +\left[\nu_2+\sigma_2\right]\left(x-x_1\right)^{\nu_2-\sigma_2}\left(y_1-y_0\right)^{\nu_2}\left(z_1-z_0\right)^{\nu_3}\\ +\left[\nu_3+\sigma_3\right]\left(x-x_1\right)^{\nu_3-\sigma_3}\left(y_1-y_0\right)^{\nu_2}\left(z_1-z_0\right)^{\nu_3}\end{matrix}\right\} \qquad \text{(A.18)}$$

worin abkürzend steht

$$\left[\nu_i+\sigma_i\right]:=\left(\nu_i+1\right)\left(\nu_i+2\right)\ldots\left(\nu_i+\sigma_i\right)\quad i=1,2,3\ , \qquad \text{(A.19)}$$

erhält man für die Taylorreihe um $\mathbf{r_1}$

$$f\left(\mathbf{r}\right)=\sum_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3=0}^{\infty}\frac{1}{\sigma_1!\sigma_2!\sigma_3!}\left(\frac{\partial^{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}f\left(\mathbf{r}\right)}{\partial x^{\sigma_1}\,\partial y^{\sigma_2}\,\partial z^{\sigma_3}z}\right)_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_1}\left(x-x_1\right)^{\sigma_1}\left(y-y_1\right)^{\sigma_2}\left(z-z_1\right)^{\sigma_3}$$

$$=\sum_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3=0}^{\infty}\frac{1}{\sigma_1!\sigma_2!\sigma_3!}\times\left(\frac{\partial^{\nu_1+\nu_2+\nu_3+\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}f\left(\mathbf{r}\right)}{\partial x^{\nu_1+\sigma_1}\,\partial y^{\nu_2+\sigma_2}\,\partial^{\nu_3+\sigma_3}z}\right)_{\mathbf{r}=\mathbf{r_0}}$$

$$\times\left\{\begin{matrix}\left[\nu_1+\sigma_1\right]\left(x-x_1\right)^{\sigma_1}\left(y_1-y_0\right)^{\nu_2}\left(z_1-z_0\right)^{\nu_3}\\ +\left[\nu_2+\sigma_2\right]\left(x-x_1\right)^{\sigma_1}\left(y_1-y_0\right)^{\nu_2}\left(z_1-z_0\right)^{\nu_3}\\ +\left[\nu_3+\sigma_3\right]\left(x-x_1\right)^{\sigma_1}\left(y_1-y_0\right)^{\nu_2}\left(z_1-z_0\right)^{\nu_3}\end{matrix}\right\}\left(x-x_1\right)^{\sigma_1}\left(y-y_1\right)^{\sigma_2}\left(z-z_1\right)^{\sigma_3}$$

(A.20)

Sie setzt die Felddarstellung in das Konvergenzgebiet um $\mathbf{r_1}$ analytisch fort.

# Anhang B

## *Mehrfachpotenzreihen*

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\nu_1,\nu_2,\dots\nu_N=0}^{\infty} a_{\nu\ ,\nu_2,\dots\nu_N} \left(x_1 - x_{01}\right)^{\nu_1} \left(x_2 - x_{02}\right)^{\nu_2} \dots \left(x_N - x_{0N}\right)^{\nu_N}$$

*mit*

$$a_{\nu\ ,\nu_2,\dots\nu_N} = \frac{1}{\nu_1!\nu_2!\dots\nu_N!} \frac{\partial^{\nu_1+\nu_2+\dots.\nu_N} f}{\partial x_1^{\nu_1} \partial x_2^{\nu_2} \dots \partial x_N^{\nu_N}} \left(\mathbf{x}_0\right)$$

(B.1)

$$\frac{\partial^{k_1+k_2\dots+k_N} f(\mathbf{x})}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_N^{k_N}} = \sum_{\nu_1\nu_2\dots\nu_N} k_1!\,k_2!\dots k_N! \binom{\nu_1}{k_1}\binom{\nu_2}{k_2}\dots\binom{\nu_N}{k_N} a_{\nu_1\nu_2\dots\nu_N} x_1^{\nu_1-k_1} x_2^{\nu_2-k_2} \dots x_N^{\nu_N-k_N}$$

(B.2)

Im Falle der Navier-Stokes-Gleichungen ist zu setzen, z. B. (2.77)

$$f(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} -\frac{1}{\rho}\nabla_{\mathbf{r}} \bullet \mathbf{v} \\ \mathbf{f} - \frac{1}{\rho}\nabla_{\mathbf{r}} p + \frac{\eta\Delta\mathbf{v}}{\rho} \end{pmatrix} \quad und \quad \mathbf{x} := (\rho, \mathbf{v})$$

(B.3)

Die Ausführung wird man zweckmäßig mit symbolischer Formelmanipulation (MATHEMATICA, MAXIMA etc.) vornehmen.

Im nichtautonomen Fall kommen partielle Zeitableitungen hinzu, also

$$f(\mathbf{x},t) := \begin{pmatrix} -\frac{1}{\rho}\nabla_{\mathbf{r}} \bullet \mathbf{v} \\ \mathbf{f} - \frac{1}{\rho}\nabla_{\mathbf{r}} p + \frac{\eta\Delta\mathbf{v}}{\rho} \end{pmatrix} \quad und \quad \mathbf{x} := (t, \rho, \mathbf{v})$$

(B.4)

# Anhang C

## *Berechnung der Reihenkoeffizienten*

### *C.1 Anfangswertaufgaben*

#### *C.1.1 Verwendung von Lie-Reihen*

Die Anwendung der Lie-Reihen zur Lösung von Anfangswertaufgaben zu kanonischen Bewegungsgleichungen erfordert die Berechnung der Lie-Reihen-Koeffizienten, d.h. die fortgesetzte Poisson-Klammer-Bildung mit der Hamilton-Funktion *H*

$$D = \{\ ;H\}, \quad D^2 = \{\{\ ;H\};H\}\ \textit{usw.} \tag{C.1}$$

***Beispiel:*** Die Hamilton-Funktion im Falle der Navier-Stokes-Gleichung lautet mit (2.1)

$$H = \mathbf{y} \circ \mathbf{F}(\mathbf{x}) = (y_1, y_2, y_3, y_4) \bullet \begin{pmatrix} -\frac{1}{\rho}\nabla_{\mathbf{r}} \bullet \mathbf{v} \\ \mathbf{f} - \frac{1}{\rho}\nabla_{\mathbf{r}} p + \frac{\eta \Delta \mathbf{v}}{\rho} \end{pmatrix} \tag{C.2}$$

Im nichtautonomen Fall ist in den erweiterteten Phasenraum überzugehen.

#### *C.1.2 Verwendung von Potenz-/Taylor-Reihen*

Zu berechnen sind die Reihenkoeffizienten (s.§ 2.1.1.1)

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathbf{x}_\nu (t - t_0)^\nu$$
$$\textit{mit} \quad \mathbf{x}_\nu = \frac{1}{\nu!}\mathbf{x}^{(\nu)}(t_0) = \frac{1}{\nu!}\mathbf{F}_\nu(t_0, \mathbf{x}_0) \quad \textit{und} \quad \mathbf{F}_1(t,\mathbf{x}) = \mathbf{F}(t,\mathbf{x}) \tag{C.3}$$

wobei die Rekursionsformel herangezogen werden kann

$$\mathbf{F}_{\nu+1}(t,\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{F}_\nu(t,\mathbf{x})}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_\nu(t,\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \bullet \mathbf{F}(t,\mathbf{x}) \quad \textit{für} \quad \nu \geq 1 \tag{C.4}$$

Bei der Ausführung ist besonders darauf zu achten, daß die Rekursion numerisch stabil ist. Vorteilhaft ist es, durch geeignete Rücksubstitution die Ableitungen in (C.4) durch die Anfangsbedingungen auszudrücken (E4).

## C.2 Randwertaufgaben

### C.2.1 Lösung nach dem Satz von Helge von Koch

Zur Entwicklung einer Lösung einer selbstadjungierten Randwertaufgabe nach dem orthonormierten System der Eigenfunktionen des Kerns der zugeordneten Fredholmschen Integralgleichung sind die Bedingungsgleichungen aufzulösen. Erfolgt das nach dem *Satz von Helge von Koch*, müssen die Bedingungsgleichungen zuerst in der geforderten Gestalt bereitgestellt werden, d.h. die Mehrfachpotenzreihen berechnet werden.

Die Bedingungsgleichungen lauten

$$\mathbf{x}_\sigma = \frac{T}{\sqrt{\lambda_\nu}} \int_0^1 \Phi_\sigma^I(\tau_n)\mathbf{F}(\mathbf{x},\tau_n)\,d\tau_n \qquad \sigma = 1(1)\infty \tag{C.5}$$

Deren rechte Seiten sollen als Mehrfachpotenzreihen in den abhängigen Variablen

$$\mathbf{x} = \left(x_! = \rho, x_2 = \omega_1, \ldots x_4 = \omega_3\right) \tag{C.6}$$

dargestellt werden. Die Funktion **F** wird beispielhaft durch die Navier-Stokes-Gleichungen

$$\begin{aligned} &\frac{d\rho}{dt} = -\nabla_{\mathbf{r}} \bullet \mathbf{v} \\ &\frac{d(\nabla\times\mathbf{v})}{dt} = \left[\mathbf{v}\bullet\nabla(\nabla\times\mathbf{v}) + \nabla\times(\mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{v})) - \frac{\eta}{\rho}\nabla\times(\nabla\times(\nabla\times\mathbf{v}))\right], \\ &\Leftrightarrow \qquad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x},t) \end{aligned} \tag{C.7}$$

aus der der Druck eliminiert ist, festgelegt durch

$$\mathbf{F}(\mathbf{x},t) = \begin{pmatrix} -\nabla_{\mathbf{r}} \bullet \mathbf{v} \\ \mathbf{f} - \left[\mathbf{v}\bullet\nabla(\nabla\times\mathbf{v}) + \nabla\times(\mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{v})) - \frac{\eta}{\rho}\nabla\times(\nabla\times(\nabla\times\mathbf{v}))\right] \end{pmatrix} . \tag{C.8}$$

### *C.2.2 Iterative Auflösung der Bedingungsgleichungen*

$$\mathbf{x}_\sigma^{(k+1)} = \frac{T}{\sqrt{\lambda_\nu}} \int_0^1 \Phi_\sigma^{II}\left(\tau_n\right) \mathbf{F}\left(\mathbf{x}^{(k)}, \tau_n\right) d\tau_n \quad \sigma = 1(1)\infty \tag{C.9}$$

*mit* Iterationsindex k= 0(1)∞

Die Iteration kann in Einzel- bzw. Gesamtschritten erfolgen.

Die Berechnung der bestimmten Integrale erfolgt zweckmäßig mittels Gauß-Quadratur, besonders bei rasch oszillierenden Integranden, herrührend von den Eigenfunktionen $\Phi_\nu^{II}\left(t_n\right) := \sqrt{2} \cos \nu\pi t_n$

# Anhang D

## *Lösung VOLTERRAscher Integralgleichungen*

Zu lösen sei eine Anfangswertaufgabe zur gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{d^2a}{dt^2} = f(a,t) \tag{D.1}$$

Dem entspricht die Aufgabe, die Volterrasche Integralgleichung

$$\begin{aligned} &a(t) = \tilde{a}(t) + \int_{t_0}^{t} (t-\tau)\, f\big(a(\tau),\tau\big)\,d\tau \\ &mit \quad \tilde{a}(t) := a_0 + \dot{a}_0(t-t_0) \;\; und \;\; a_0, \dot{a}_0 \;\; Anfangswerte\ zur\ Epoche\ t_0 \end{aligned} \tag{D.2}$$

zu lösen (S2). Dazu wird die Lösung einer Randwertaufgabe herangezogen und diese nach der Methode der unendlich vielen Variablen (S2) gelöst, also mit einer Entwicklung nach einem vollständigen System orthonomierter Eigenfunktionen

$$\begin{aligned} &a(t_n) = \bar{a}(t_n) + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \bar{\varphi}^I_\nu(t_n) \\ &mit \;\; \bar{a}(t_n) := a_A + (a_B - a_A)t_n \;\; und \;\; a_A, a_B \;\; Randwerte \\ &Eigenfunktionen\ \bar{\varphi}^I_\nu(t_n) := \sqrt{2}\sin(\nu\pi t_n)\ orthonormiert\ über\ dem \\ &Intervall\ T := t_B - t_A \;\; Zeitnormierung\ t_n := \frac{t-t_A}{T} \end{aligned} \tag{D.3}$$

Nach einem ***Satz von Mercer*** ist die Bilineardarstellung des Integralgleichungskerns im Grundgebiet *T* absolut und gleichmäßig konvergent, wenn er positiv definit ist. Zur Frage der Konvergenz der Lösungsreihe sei auf (G2) verwiesen.
Um eine Lösung der Gleichung (D.1) zu bestimmen, soll die Volterra-Gleichung vermittels einer Randwertaufgabe gelöst werden (S2).

Dazu wird die Inhomogenität der Gleichung (D.1) wie auch ihre Lösung $a(t)$ nach den Eigenfunktionen entwickelt

$$f\big(a(t_n),t_n\big) = \bar{f}(t_n) + \sum_{\sigma=1}^{\infty} f_\sigma \bar{\varphi}^I_\sigma(t_n) \tag{D.4}$$

Geht man mit (D.3-4) in die Volterragleichung (D.2) ein, so bekommt man eine Beziehung der Entwicklungskoeffizienten $a_\nu$ *und* $f_\sigma$ $\nu,\sigma = 1(1)\infty$

$$\bar{a}(t_n)+\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu\bar{\varphi}_\nu^I(t_n)=\tilde{a}(t)+\int_0^t\left((t-\tau)\left[\bar{f}(t_n)+\sum_{\nu=1}^{\infty}f_\nu\bar{\varphi}_\nu^I(t_n)\right]\right)d\tau \tag{D.5}$$

Mit den Integralen

$$\begin{aligned}\int_0^t(t-\tau)\bar{f}(\tau_n)d\tau &= f_A\int_0^t(t-\tau)d\tau+\Delta f\int_0^t(t-\tau)\tau d\tau\\ &= f_A\frac{t^2}{2}+\Delta f\left(\frac{t^3}{2}-\frac{t^3}{3}\right)=f_A\frac{t^2}{2}+\Delta f\frac{t^3}{6}\end{aligned} \tag{D.6}$$

$$\begin{aligned}\int_0^t\left((t-\tau)\left[\sum_{\nu=1}^{\infty}f_\nu\bar{\varphi}_\nu^I(t_n)\right]\right)d\tau &= t\sum_{\nu=1}^{\infty}f_\nu\int_0^t\left(\bar{\varphi}_\nu^I\left(\frac{t}{T}\right)\right)d\tau-\sum_{\nu=1}^{\infty}f_\nu\int_0^t\tau\bar{\varphi}_\nu^I\left(\frac{t}{T}\right)d\tau\\ &=: t\sum_{\nu=1}^{\infty}f_\nu\quad K_{\varphi,\nu}^t(t)\qquad-\quad\sum_{\nu=1}^{\infty}f_\nu\quad K_{\varphi,\nu}^\tau(t)\end{aligned}$$

*wobei*

$$K_{\varphi,\nu}^t(t)=\frac{\sqrt{2}}{\nu\pi}(\cos\nu\pi T-1)\quad und\quad K_{\varphi,\nu}^\tau(t)=\begin{cases}-\dfrac{\sqrt{2}}{(\nu\pi)^2} & \nu\ gerade\\ +\dfrac{\sqrt{2}}{(\nu\pi)^2} & \nu\ ungerade\end{cases} \tag{D.7}$$

lautet (D.5)

$$\bar{a}(t_n)+\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu\bar{\varphi}_\nu^I(t_n)=\tilde{a}(t)+f_A\frac{t^2}{2}+\Delta f\frac{t^3}{6}+t\sum_{\nu=1}^{\infty}f_\nu K_{\varphi,\nu}^t-\sum_{\nu=1}^{\infty}f_\nu K_{\varphi,\nu}^\tau \tag{D.8}$$

Aufgelöst nach dem Randwert $a_B := a(t_n=1)\equiv a(T)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}a_B &= a_\sigma-a_A-\dot{a}_A T-f_A\frac{T^2}{2}-\Delta f\frac{T^3}{6}\\ &\quad+T\sum_{\nu=1}^{\infty}f_\nu K_{\varphi,\nu}^t\left(t_n=1\triangleq t=T\right)-\sum_{\nu=1}^{\infty}f_\nu K_{\varphi,\nu}^\tau\left(t_n=1\triangleq t=T\right)\end{aligned} \tag{D.9}$$

Die Koeffizienten $a_\sigma$ der Lösungsreihe bekommt man aus (D.5) bzw. aus

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu\bar{\varphi}_\nu^I(t_n)=\tilde{a}(t)-\bar{a}(t_n)+\int_0^t\left((t-\tau)\left[\bar{f}(t_n)+\sum_{\nu=1}^{\infty}f_\nu\bar{\varphi}_\nu^I(t_n)\right]\right)d\tau \tag{D.10}$$

indem man mit $\bar{\varphi}_\sigma^l(t_n)$ multipliziert und anschließend über das Grundgebiet $[0,1]$ integriert und dabei die Orthonormierung der Eigenfunktionen im Grundgebiet beachtet

$$a_\nu = \int_0^1 \left\{ \tilde{a}(\tau_n T) - \bar{a}(\tau_n) + \int_0^t \left( (\tau_n T - \tau_n' T) \left[ \bar{f}(\tau_n) + \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu \bar{\varphi}_\nu^l(\tau_n) \right] \right) d\tau_n \right\} \bar{\varphi}_\sigma^l(\tau_n') d\tau_n' \tag{D.11}$$

Diese Gleichungen vermitteln den Zusammenhang der Reihenkoeffizienten der Lösung und der Inhomogenität der Differentialgleichung im Spektralbereich. Sie sind das Äquivalent der Lösung der Volterra-Gleichung im Zeitbereich.

Um die Gleichungen (D.11) auswerten zu können, müssen die Koeffizienten $f_\nu$ bekannt sein. Sie ergeben sich aus (D.4) gemäß

$$f_\nu := \int_0^1 \left( f(\tau_n) - \bar{f}(\tau_n) \right) \bar{\varphi}_\nu^l(\tau_n) d\tau_n \tag{D.12}$$

Die Funktion $f(a,t)$ kann aus der Lösungsfunktion $a(t)$ durch eine Abfolge von (arithmetischen und weiteren) Operationen aufgebaut und als Entwicklung nach den Eigenfunktionen dargestellt werden (S2).

Dadurch entsteht ein i. allg. nichtlineares unendliches System von Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten der Lösungsdarstellung

$$a_\sigma = A_\sigma(a_A, a_B, T; a_1, a_2, \ldots) \quad \sigma = 1(1)\infty \tag{D.13}$$

Zur Lösung der Volterraschen Integralgleichung (D.2) ist somit das Gleichungssystem (D.13) aufzulösen, zum Beispiel iterativ oder etwa mit Hilfe des ***Satzes von Helge von Koch*** (s.§2.2 und Anhang C.2).

## Reports in the *CGE Reports* series (ISSN 2195-7126)
## Veröffentlichungen in der Schriftenreihe „CGE Reports“ (ISSN 2195-7126)

**No. 1:** Pail R., Hugentobler U., Rummel R., Seitz F., Bosch W., Angermann D., Steigenberger P., Gruber T., Bouman J., Schmidt M., Völksen C., Neidhardt A., Schreiber U., Horwath M. (2012): Research and Development Programme 2011–2015, Forschungs- und Entwicklungsprogramm 2011–2015, ISBN 978-3-934205-32-1.

**No. 2:** Yi, Weijong (2012): The Earth's gravity field from GOCE, ISBN 978-3-934205-34-5.

**No. 3:** Schlie, J. (2012): Die GETRIS Mission – Konzeptstudie einer zukünftigen Schwerefeldmission zur Beobachtung von Massentransportprozessen im System Erde, ISBN 978-3-934205-33-8.

**No. 4:** Ettl, M. (2013): Hochgenaue numerische Lösung von Bewegungsproblemen mit frei wählbarer Stellengenauigkeit, ISBN 978-3-934205-35-2.

**No. 5:** Schneider, M. (2014): Zur Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen, ISBN 978-3-934205-36-9.

ISSN 2195-7126
ISBN 978-3-934205-36-9